

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS DE FONCTIONS DE SCHUR
GAUCHES

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
ANNIE LETARTE

AOÛT 2009

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'aimerais débiter ces remerciements en m'adressant à mes deux directeurs François Bergeron et Gilbert Labelle, sans qui je ne me serais pas rendue là. Merci d'avoir su m'encourager et me motiver tout au long de la maîtrise. Merci aussi de m'avoir accordé du temps chaque fois que j'en ai demandé. J'aimerais tout particulièrement remercier François d'avoir trouvé un sujet qui ressemble à un «jeu avec plein de dessins» comme je lui avais demandé.

Bien sûr, merci à mes parents Lise et Benoît, ainsi que ma soeur Audrée de m'avoir soutenue, humeur comprise, tout au long de ce mémoire. Merci aussi à mon frère David et ma belle-soeur Catherine de m'avoir encouragée et avoir offert de corriger l'orthographe de ce mémoire (s'il y a des erreurs, c'est dû au fait qu'ils ont eu une version antérieure). Merci à mes parents de m'avoir apprise à tenter d'aller jusqu'au bout de ce que je commence, même si je ne suis pas toujours sûre d'y arriver.

Merci aussi au reste de ma famille et à mes amis qui ont toujours cherché à avoir des nouvelles de ce fameux mémoire, à savoir s'il avançait bien, si j'allais bien ou si je devenais dépressive à force de rester chez nous en tête-à-tête avec mon portable. Merci de toutes les petites attentions et les paroles d'encouragement que vous avez eues à mon égard. Ça m'a toujours fait très plaisir.

Merci aussi à tout le personnel et les étudiants du département de mathématiques. Vous avez toujours été très sympathiques avec moi, bien que je n'étais pas très présente au cours de la dernière année.

Merci à tous.

Annie Letarte

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	v
RÉSUMÉ	x
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
NOTIONS COMBINATOIRES IMPORTANTES	5
1.1 Partages et permutations	6
1.2 Diagrammes et tableaux	7
1.3 Ensemble partiellement ordonné	23
CHAPITRE II	
FONCTIONS SYMÉTRIQUES	27
2.1 L'algèbre graduée des fonctions symétriques	27
2.2 Bases principales des fonctions symétriques	29
CHAPITRE III	
FONCTIONS DE SCHUR GAUCHES	38
3.1 Fonctions de Schur gauches	38
3.1.1 Égalité entre fonctions de Schur gauches	44
3.2 Produit de fonctions de Schur ou fonctions de Schur gauches	48
3.3 Résultat sur le produit de fonctions de Schur	51
3.4 Schur positivité	55
3.5 m -positivité	69
3.6 Résumé : cas spéciaux	72
CHAPITRE IV	
ORDRES PARTIELS SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET POSITI- VITÉ	74
4.1 Poset associé à la h -positivité	74
4.2 Poset associé à la s -positivité	76
4.3 Poset des fonctions de Schur gauches	81

4.4 Poset des fonctions de Schur gauches ordonnées par la m -positivité	85
CONCLUSION	86
APPENDICE A	
PROGRAMME MAPLE	87

LISTE DES FIGURES

1.1	Diagramme.	8
1.2	Complété du diagramme de la figure 1.1.	8
1.3	Diagramme 6311 et son conjugué 422111.	9
1.4	Rectangle et carré.	9
1.5	Équerre et équerre épaisse.	10
1.6	Presque rectangles.	10
1.7	Diagramme gauche.	11
1.8	Pas un diagramme gauche.	11
1.9	Diagrammes $\lambda = 655421$ et $\mu = 422211$	12
1.10	Diagramme de forme $\lambda/\mu = 655421/422211$	12
1.11	Diagramme gauche.	12
1.12	Chemin.	13
1.13	Chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	14
1.14	Chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	14
1.15	Chemin codé par $xyxyxyxy$	15
1.16	Exemple d'ombre d'un chemin.	16
1.17	Deux chemins de longueurs 13 et diagramme gauche à 12 cases.	17

1.18	Diagramme gauche standardisé et diagrammes gauches non standardisés.	18
1.19	Bande horizontale.	19
1.20	Bande verticale.	19
1.21	Ruban et non ruban.	19
1.22	Pseudo-ruban.	20
1.23	Concaténation, empilement et recollement des diagrammes 41 et 322. . .	20
1.24	Tableau.	21
1.25	Tableau semi-standard.	22
1.26	Tableau standard.	23
1.27	Tableau de Young et tableau gauche.	23
1.28	Infimum et suprémum.	24
1.29	Treillis de Young.	25
1.30	Ordre de dominance des partages de 6.	26
2.1	Matrices de passage entre fonctions monomiales et élémentaires.	32
2.2	Matrices de passage entre fonctions monomiales et homogènes.	34
2.3	Tableau de forme $\lambda = 32$ de contenu $a < b < c < d < e$	36
3.1	Tableau de forme $\lambda = 331/21$ et de contenu $a < b < c < d$	39
3.2	Tableau gauche λ/μ	40
3.3	Tableau de forme mm et de contenu $i < i + 1$	41
3.4	Tableau de forme $j + k$ et de contenu $i < i + 1$	41

3.5	Tableau de forme $k + j$ et de contenu $i < i + 1$	42
3.6	Tableau gauche contenant la forme $j + k$	42
3.7	Premier cas, tableau gauche contenant les figures 3.3 et 3.4.	42
3.8	Deuxième cas, tableau gauche contenant les figures 3.3 et 3.4.	43
3.9	Troisième cas, tableau gauche contenant les figures 3.3 et 3.4.	43
3.10	Quatrième cas, tableau gauche contenant les figures 3.3 et 3.4.	43
3.11	Découpage des formes comprenant des cases de valeurs i ou $i + 1$	44
3.12	Tableau de forme 2111 et 2222/111, $a < b < c < d < e$	45
3.13	Tableaux semi-standards de forme 2211/1 et 2221/11, $a < b < c < d$. . .	45
3.14	Espacement entre composantes connexes.	46
3.15	Permutations des composantes connexes.	46
3.16	Exemple tiré de [17].	47
3.17	Tableau de dimension $n \times n$	47
3.18	Diagrammes correspondants aux indexes de $s_{32}s_{21}$	48
3.19	Produit illustré par les diagrammes indexés aux fonctions de Schur. . . .	50
3.20	$s_{\mu/\nu}s_{\alpha/\beta} = s_{\lambda/\theta}$	50
3.21	$s_{31}s_{32} = s_{5421/22} = s_{5432/33}$	50
3.22	Développement de $s_{31}s_3$	52
3.23	Développement de $s_{211}s_{111}$	52
3.24	Diagrammes des partages indexés aux produits $s_{32}s_{22}$	54

3.25	Diagrammes des partages indexés aux produits $s_{44}s_{222}$.	54
3.26	Exemple de l'équation de Kirillov.	56
3.27	$(641, 4221)^\sim = (6421, 421)$.	57
3.28	$s_{21}s_{21} - s_{22}s_{11}$ schur-positif.	58
3.29	$54221 \xrightarrow{2} 53221 = 53221 \uparrow_4$.	59
3.30	$s_3s_{31} - s_{41}s_2$ schur-positif.	61
3.31	$(0, 665443321)^* = (43332211, 6531)$.	62
3.32	$(k, 665443321)^* = (43332211, 6531)$.	63
3.33	Bijection avec empilement si $j > k$ et recollement si $j \leq k$.	66
3.34	$s_3s_2s_1$	67
3.35	$(521/31, 43/22)^\sim = (531/32, 42/21)$.	67
3.36	$(521/311, 43)^\sim = (531/31, 42/1)$.	67
4.1	Tableau rectangle à une ligne.	75
4.2	Poset des fonctions homogènes indexées par des partages de 6.	77
4.3	Poset des fonctions de Schur indexées des partages de 2.	78
4.4	Poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 3.	79
4.5	Poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 4.	80
4.6	Poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 2 et multipliées par s_2 .	81
4.7	Poset des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 2.	82
4.8	Poset des fonctions de Schur gauches indexés par des partages de 3.	82

4.9	Poset des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 4. . .	83
4.10	Arêtes dont l'existence reste à justifier dans le poset des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 5.	84
4.11	Poset des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 4. . .	85
A.1	Poset avec $n=3$	94
A.2	Poset avec $n=6$	95

RÉSUMÉ

Ce mémoire vise à faire une synthèse sur la Schur positivité des différences de fonctions de Schur gauches. On cherche à voir la représentation de cet ensemble de fonctions à l'aide de la Schur positivité.

Pour ce faire, on introduit premièrement les notions de base nécessaires à sa compréhension tel que les permutations, les partages, les diagrammes, les tableaux et les ensembles partiellement ordonnés.

Ensuite une discussion sur l'algèbre graduée des fonctions symétriques s'impose puisque les fonctions de Schur forment une base des fonctions symétriques. On présente dans un deuxième temps certaines bases des fonctions symétriques. En fait, on voit la base des fonctions homogènes, la base des fonctions élémentaires et la base des fonctions monomiales. On voit par ailleurs la m -positivité qui est un autre ordre partiel semblable à la Schur positivité.

En ce qui a trait aux fonctions de Schur gauches, on tente plus particulièrement de comprendre les égalités qui surviennent entre certaines fonctions de Schur gauches. On tente aussi de faire le point (en partie) sur les inégalités des coefficients de Littlewood-Richardson qui apparaissent lors d'un produit de fonctions de Schur ou lorsqu'on écrit les fonctions de Schur gauches en termes de fonctions de Schur. De plus, on veut trouver les seuls diagrammes gauches nécessaires à la représentation des ensembles partiellement ordonnés des fonctions de Schur gauches.

Enfin, on vise à présenter certains ensembles partiellement ordonnés par la Schur positivité des fonctions de Schur gauches, de même qu'être en mesure de montrer l'existence d'un maximum d'arêtes liant les différents niveaux de la représentation de l'ensemble partiellement ordonné par la Schur positivité des fonctions de Schur gauches.

INTRODUCTION

Le sujet de ce mémoire se situe à la frontière de la combinatoire énumérative et de la théorie des fonctions symétriques. Le fait qu'il y ait de multiples liens entre ces deux sujets est bien connu (voir [14] et [20]) et est exploité depuis le tout début de l'étude des fonctions symétriques, par exemple par Frobenius dans [7] et Schur dans [19]. À ce sujet, Macdonald souligne que :

*«The representation theory of finite groups was found by Frobenius [...] in particular, he obtained the irreducible characters of the symmetric groups in 1900 [...] Schur functions, despite their name, were first considered by Jacobi [8], as quotients of skew-symmetric polynomials by the polynomial a_δ [...] Their relevance to the representation theory of the symmetric groups and the general linear groups, which we shall describe later, was discovered by Schur much later.»*¹

Soulignons que les identités concernant les fonctions symétriques sont d'une grande importance pour certaines questions relevant de la physique mathématique, de la théorie de la représentation des groupes, de la géométrie algébrique, et de plusieurs autres domaines des mathématiques.

La combinatoire énumérative intervient de toutes sortes de façons dans l'étude des fonctions symétriques. En premier lieu, l'espace vectoriel des fonctions symétriques homogènes de degré n admet une base naturellement indexée par les partages de n . L'une des bases les plus importantes est constituée des fonctions de Schur s_λ dont l'une des descriptions possibles est entièrement combinatoire. L'espace des fonctions symétriques est fermé sous l'addition et la multiplication, et l'étude de constantes de structure (co-

¹Extrait tiré des pages 61 et 134 du livre [14] de Macdonald.

efficient de Littlewood-Richadson) associée à la base des fonctions de Schur revêt une grande importance pour la physique, la géométrie et la théorie de la représentation des groupes :

$$s_{\theta/\mu} = \sum_{\lambda} c_{\lambda\mu}^{\theta} s_{\lambda}. \quad (1)$$

Ainsi, dans tous ces domaines, il importe de développer une bonne compréhension de ces **coefficients de Littlewood-Richardson** $c_{\lambda\mu}^{\theta}$. À prime abord, il est étonnant que ceux-ci apparaissent aussi lorsqu'on développe les fonctions de Schur gauches comme combinaison linéaire de fonctions de Schur. Il est frappant que ces coefficients soient des entiers positifs, et ceci a été en partie expliqué par **Littlewood et Richardson** dans [13]. Le fait que $s_{\theta/\mu}$ se développe comme combinaison linéaire de fonctions de Schur avec des coefficients positifs est une instance de la notion de Schur-positivité. C'est cette notion qui joue un rôle central dans ce travail.

Le but de ce mémoire est de faire le point sur des **familles d'inégalités** entre coefficients de Littlewood-Richardson

$$c_{\alpha\beta}^{\theta} \leq c_{\lambda\mu}^{\theta}, \text{ avec } \theta \text{ quelconque.} \quad (2)$$

Parmi les nombreuses raisons pour l'étude de ces inégalités, on peut certainement souligner qu'elles correspondent à des inclusions de composantes isotypiques de produits tensoriels de représentations irréductibles. L'étude de ces familles d'inégalités équivaut à l'étude de la **Schur-positivité** des différences

$$s_{\lambda}s_{\mu} - s_{\alpha}s_{\beta}.$$

Puisque $s_{\lambda}s_{\mu} - s_{\alpha}s_{\beta}$ est Schur-positif si et seulement si on a les inégalités de l'équation 2 pour tout θ . Comme on le verra, ces questions se généralisent clairement en considérant des différences de fonctions de Schur gauche.

Le premier chapitre sert à l'introduction de notions qui reviennent continuellement dans ce mémoire tel que les permutations, les partages, les tableaux et les ensembles partiellement ordonnés. Les permutations servent dans la définition même des fonctions symétriques. Les partages servent entre autres à indexer les bases des fonctions

symétriques. Quant aux tableaux, on les retrouve dans la définition purement combinatoire de la base des fonctions de Schur. La dernière section de ce chapitre porte sur la notion d'ensemble partiellement ordonné puisque ce mémoire vise principalement à décrire un ordre partiel sur les fonctions de Schur gauche pour lequel $s_{\alpha/\beta} \leq s_{\lambda/\mu}$ si et seulement si $s_{\lambda/\mu} - s_{\alpha/\beta}$ est Schur positif.

Dans un deuxième temps, on rappelle les notions de bases concernant les fonctions symétriques. Le changement de bases entre fonctions de Schur et fonctions symétriques monomiales fait apparaître les nombres de Kostka, en liaison avec l'étude des coefficients de Littlewood-Richardson. De façon similaire, le changement de base des fonctions élémentaires aux fonctions de Schur fait aussi intervenir les nombres de Kostka d'une façon duale. Il s'ensuit que le produit scalaire des fonctions symétriques homogènes avec les fonctions de Schur est égale aux nombres de Kostka. Tout ceci intervient dans notre discussion finale.

Bien qu'on voit apparaître les fonctions de Schur au deuxième chapitre, c'est au troisième qu'on en rappelle les propriétés intéressantes. Les propriétés, décrites dans cette partie, s'étendent aux fonctions de Schur gauches. Comme notre objet d'étude concerne les fonctions de Schur gauche, il est important de souligner que plusieurs diagrammes gauches distincts peuvent donner lieu à la même fonction symétrique. Autrement dit, on peut avoir $\lambda/\mu \neq \alpha/\beta$ avec $s_{\lambda/\mu} = s_{\alpha/\beta}$, et il y a une infinité de diagrammes gauches donnant la même fonction symétrique. Certaines de ces situations sont tout à fait triviales et sont faciles à éliminer par l'introduction de la notion de diagramme gauche standardisé, qui eux sont en nombre fini. Cependant, le problème général de l'égalité $s_{\lambda/\mu} = s_{\alpha/\beta}$ n'est pas encore résolu de façon satisfaisante (voir [5], [17], [18] et [23]). Comme tel, cela n'a pas d'impact sur notre étude, mais il demeure que la description explicite des objets apparaissant dans notre problématique nécessite d'identifier un représentant de la classe d'égalité entre $s_{\lambda/\mu}$. En supposant que ceci a été fait, on en arrive à la problématique suivante qui constitue le coeur de notre travail : on va étudier l'ordre partiel

$$s_{\alpha/\beta} \leq s_{\lambda/\mu} \text{ si et seulement si } s_{\lambda/\mu} - s_{\alpha/\beta} \text{ est Schur positif,}$$

sur l'ensemble des fonctions de Schur indexées par des diagrammes gauches ayant n cases :

$$\mathcal{T}_n := \{s_{\lambda/\mu} \mid \text{nombre de cases de } \lambda/\mu \text{ égale à } n\}.$$

Comme on l'a remarqué ci-dessus, cet ensemble est fini, mais il n'est pas évident de trouver un système canonique de diagrammes gauches qui indexe ses éléments. En particulier, on ne sait pas dire en général quel est la cardinalité de cet ensemble.

Ce travail consiste à dégager les grandes lignes des problèmes soulevés par l'étude du poset (S_n, \leq) . On va aussi étudier des variantes tel que (S_n, \leq_m) et (S_n, \leq_h) , où on définit les ordres \leq_m et \leq_h en posant que

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta \leq_m s_{\lambda/\mu} & \quad \text{si et seulement si} \quad s_{\lambda/\mu} - s_\alpha s_\beta \text{ est m-positif, et} \\ s_\alpha s_\beta \leq_h s_{\lambda/\mu} & \quad \text{si et seulement si} \quad s_{\lambda/\mu} - s_\alpha s_\beta \text{ est h-positif.} \end{aligned}$$

Bien entendu, on ne fait ici qu'établir les grandes lignes d'une étude qui reste à faire. La contribution consiste simplement à mettre de l'avant les aspects évidents de cette problématique, et à fournir une banque d'exemples explicites.

CHAPITRE I

NOTIONS COMBINATOIRES IMPORTANTES

Ce premier chapitre sert à introduire des objets combinatoires importants pour ce mémoire dont le coeur porte sur l'étude de propriétés des fonctions symétriques. Ces objets comprennent entre autres : les permutations, les partages, les tableaux et les ensembles partiellement ordonnés. Tout d'abord, pour définir la notion même de fonction symétrique, on doit rappeler des notions de base qui concernent ce groupe symétrique, c'est-à-dire le groupe des permutations d'un ensemble de variables. L'ensemble des fonctions symétriques, étant fermé pour l'addition et la multiplication par les scalaires, est donc naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. Les partages servent à indexer les bases de cet espace. La base de Schur s_λ est l'une des bases les plus importantes à la fois pour notre problématique et pour la physique théorique, la théorie de la représentation, la géométrie algébrique, ... D'autre part, l'ensemble des fonctions symétriques est fermé par multiplication, et les constantes de structure $c_{\mu\nu}^\lambda$:

$$s_\mu s_\nu = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda,$$

apparaissent lorsqu'on exprime un produit de fonction de Schur $s_\mu s_\nu$ comme combinaison linéaire des vecteurs de base s_λ . Ces constantes peuvent se décrire au moyen de manipulations combinatoires sur les tableaux de Young. Toutes ces notions se regroupent pour permettre de décrire l'objet principal de ce mémoire qui consiste en l'étude des propriétés d'un ordre partiel sur un ensemble de fonctions symétriques. À cet égard, la référence [1] écrite par François Bergeron s'avère particulièrement pertinente.

1.1 Partages et permutations

Un **partage** λ d'un entier d (dans \mathbb{N}) est une liste $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ d'entiers positifs, dont les **parts** $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ sont tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = d$. Le fait que λ est un partage de d est dénoté $\lambda \vdash d$. De plus, la longueur de λ est k et s'écrit $l(\lambda)$. On désigne aussi par la notation $|\lambda|$ la somme $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$. Enfin, afin de ne pas alourdir les notations, on écrit souvent $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$. Ainsi, les partages de $d = 5$ sont : 5, 41, 32, 311, 221, 2111 et 11111.

On considère une liste (finie ou infinie) de variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, et on désigne par $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ l'anneau gradué des séries formelles à coefficients rationnels en les variables \mathbf{x} de degré borné¹ sur cet anneau. On considère l'action du groupe des **permutations**² de l'ensemble \mathbb{N} des variables. Autrement dit, l'action d'une permutation σ sur les variables x_i se décrit par : $\sigma \cdot x_i = x_{\sigma(i)}$. De façon tout à fait analogue, on agit sur les listes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ par permutation des entrées : c'est-à-dire $\sigma \cdot \alpha = (\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots)$. On désigne par \mathbb{S}_α l'ensemble des **permutations (distinctes)** des entrées de la liste α . Ainsi, pour $\alpha = (2, 3, 3)$, on a

$$\mathbb{S}_\alpha = \{(2, 3, 3), (3, 2, 3), (3, 3, 2)\}.$$

On appelle une **transposition** une permutation qui échange deux éléments d'une liste et laisse fixe tous les autres. Par exemple, si $\sigma = (3, 5)$ et qu'on le fait agir sur la liste $\alpha = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, alors on obtient $(1, 2, 5, 4, 3, 6, 7)$. On peut écrire toutes permutations comme un produit de transpositions. Ainsi, avec la même liste α , soit $\sigma = (1, 3, 6)(2, 5)$, alors $\sigma \cdot \alpha = (3, 5, 6, 4, 2, 1, 7)$. Cette permutation peut être écrite par un produit de transposition, par exemple, $(1, 3)(3, 6)(2, 5)$.

Pour une liste α d'entiers positifs, avec un nombre fini d'entrées non nulles, on dénote \mathbf{x}^α le **monôme** $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots$. Ainsi, pour $\alpha = (0, 2, 1, 0, 3, 0, 0, \dots)$ on a $\mathbf{x}^\alpha = x_2^2 x_3 x_5^3$.

¹Techniquement ceci correspond à une limite inductive.

²Une bijection qui fixe les éléments de \mathbb{N} à l'exception d'un nombre fini.

On dit qu'un monôme est de **degré** d si $|\alpha| = \sum_i \alpha_i = d$, $d \in \mathbb{N}$ et on note $\deg(\mathbf{x}^\alpha) = d$, et donc $\deg(x_2^2 x_3 x_5^3) = 6$. L'ensemble des monômes dans $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ forme une base.

1.2 Diagrammes et tableaux

Une représentation particulièrement intéressante des partages pour notre propos consiste à les «dessiner» comme des diagrammes. L'intérêt de cette représentation se trouve spécialement dans le fait qu'on définit une base importante des fonctions symétriques à l'aide de tableaux, c'est-à-dire la base des fonctions de Schur. On rappelle que l'objectif de ce mémoire consiste à faire le point (en partie) sur les familles d'inégalités entre coefficients de Littlewood-Richardson. En fait, les produits de fonctions de Schur font apparaître ces coefficients. Ces derniers peuvent se calculer à l'aide des types de tableaux appelés tableaux gauches semi-standards. Pour terminer, on peut dire de la représentation des fonctions symétriques en termes de tableaux qu'elle facilite grandement les explications, les définitions et la compréhension de ce mémoire.

Diagramme

Un **diagramme** est simplement un sous-ensemble fini E de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On en donne une représentation géométrique de la façon suivante : à chaque couple $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on associe une case de taille 1×1 , le coin inférieur gauche de cette case se situant au point (x, y) . Ainsi, le sous-ensemble

$$E = \{(0, 0), (4, 0), (5, 0), (2, 1), (0, 3)\} \quad (1.1)$$

est représenté par le diagramme de la figure 1.1.

On dit qu'un couple $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est plus petit ou égal au couple $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si on a $i \leq x$ et $j \leq y$. Dans ce sens, on dit que le **complété** d'un diagramme E est représenté par

$$\overline{E} = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{il existe } (x, y) \in E \text{ tel que } (i, j) \leq (x, y)\}.$$

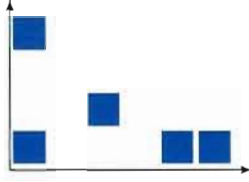


Figure 1.1 Diagramme.

Ainsi, le complété du diagramme de l'équation 1.1 est

$$\overline{E} = \{(\mathbf{0},\mathbf{0}), (1,0), (2,0), (3,0), (\mathbf{4},\mathbf{0}), (\mathbf{5},\mathbf{0}), (0,1), (1,1), (\mathbf{2},\mathbf{1}), (0,2), (\mathbf{0},\mathbf{3})\},$$

où les caractères gras sont les couples qui étaient déjà dans E . On peut voir le diagramme de \overline{E} à la figure 1.2. On observe facilement que le complété du complété de E est égal au complété de E , c'est-à-dire $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$. Dans un même d'ordre d'idée, on dit qu'un

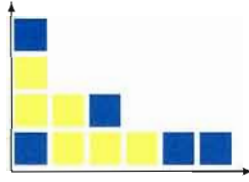


Figure 1.2 Complété du diagramme de la figure 1.1.

diagramme E est **de Ferrers** (parfois appelé **diagramme de Young**) si et seulement si $E = \overline{E}$. Ainsi, le diagramme de la figure 1.2 est de Ferrers. Les diagrammes de Ferrers sont associés bijectivement aux partages de la façon suivante : pour un partage $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ de d , on construit le diagramme de Ferrers correspondant en considérant l'ensemble des cases

$$E = \lambda = \{(i-1, j-1) \mid 1 \leq j \leq l(\lambda), 1 \leq i \leq \lambda_j\}.$$

On définit la $j^{\text{ième}}$ -**ligne** du diagramme E par le sous-ensemble $\{(i, j-1) \mid (i, j-1) \in E\}$. Il y a donc $l(\lambda)$ lignes dans le diagramme E . En particulier, on observe que $\lambda_j =$ nombre de cases sur la $j^{\text{ième}}$ ligne. Semblablement, on définit la $i^{\text{ième}}$ -**colonne** du diagramme E par le sous-ensemble $\{(i-1, j) \mid (i-1, j) \in E\}$. On peut remarquer qu'il y a λ_1 colonne

dans E puisque $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$. On dénote aussi λ ce diagramme. Même si λ désigne à la fois le diagramme et le partage, il se distingue facilement selon le contexte. En continuant avec l'exemple précédent, on obtient que le diagramme de la figure 1.2 représente le partage $\lambda = 6311$ de $d = 11$. Considérant λ comme un sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on dit qu'un partage λ' est le **conjugué** de λ si on a $(b, a) \in \lambda'$ si et seulement si $(a, b) \in \lambda$. Comme l'illustre la figure 1.3, le conjugué de $\lambda = 6311$ est $\lambda' = 422111$.

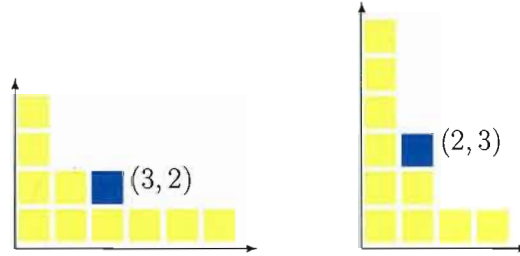


Figure 1.3 Diagramme 6311 et son conjugué 422111.

On remarque que les lignes d'un diagramme deviennent les colonnes de son conjugué et réciproquement. De plus, on observe que le conjugué du conjugué de λ est $\lambda : (\lambda')' = \lambda$.

Soit $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ un partage de n . Naturellement, un diagramme de Ferrers est appelé **rectangle** si toutes les parts de λ sont égales : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = j$. On écrit alors $\lambda = j^k$ (voir la sous-section Tableau de la section 1.2). Bien entendu, un diagramme rectangle est dit **carré** s'il est constitué de k parts de longueur k , c'est-à-dire $\lambda = k^k$. On peut voir à la figure 1.4 un diagramme rectangle et un diagramme carré.



Figure 1.4 Rectangle et carré.

On qualifie un diagramme de Ferrers d'**équerre** si $\lambda_1 = r$, $r < n$ et $\lambda_i = 1$ pour $2 \leq i \leq k$. On peut remarquer que le partage correspondant à une équerre comprend exactement

deux valeurs différentes pour identifier toutes les parts, soit r et 1 . Plus généralement, une **équerre épaisse** est un diagramme de Ferrers dont le partage correspondant s'écrit à l'aide d'exactly 2 valeurs. C'est-à-dire qu'on a $\lambda_i = r$ pour $1 \leq i \leq j$, $j < k$, et $\lambda_i = s$ pour $j + 1 \leq i \leq k$. La figure 1.5 présente des exemples de tels diagrammes.



Figure 1.5 Équerre et équerre épaisse.

Enfin, un **presque rectangle** est une équerre épaisse où l'on peut obtenir un rectangle en supprimant une partie soit d'une ligne, soit d'une colonne. Plus formellement, on doit avoir au moins l'un des quatre cas suivants en partant de la définition d'équerre épaisse : soit $j = k - 1$, $j = 1$, $s = r - 1$ ou $s = 1$. Les quatre types de possibilités sont représentées à l'aide des exemples de la figure 1.6.



Figure 1.6 Presque rectangles.

Diagramme gauche

Une autre famille importante de diagrammes est celle des diagrammes gauches. Encore une fois, l'importance est due aux coefficients de Littlewood-Richardson. On a déjà dit que ces coefficients se calculent (entre autres) à l'aide de tableaux. En fait, ces tableaux sont de forme gauche. De plus, la base principale de notre propos consiste en la base des fonctions de Schur gauche qui se définit justement à l'aide des tableaux gauches.

Pour qu'un diagramme E soit un **diagramme gauche**, on doit avoir $(x, y) \in E$ chaque fois qu'on peut trouver (a, b) et (c, d) dans E tel que $(a, b) \leq (x, y) \leq (c, d)$. Cette

définition est illustrée à la figure 1.7. Par contre, la figure 1.8 montre un exemple de

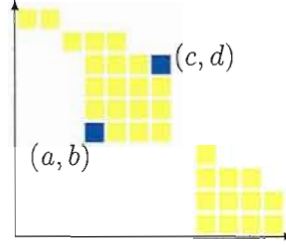


Figure 1.7 Diagramme gauche.

diagramme qui n'est pas un diagramme gauche étant donné l'absence de la case $(5, 6)$ et $(3, 4) \leq (5, 6) \leq (6, 7)$, où $(3, 4)$ et $(6, 7)$ sont des cases faisant parties du diagramme.

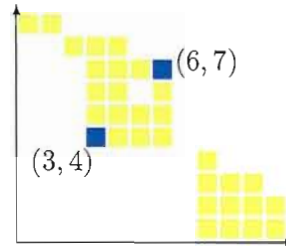


Figure 1.8 Pas un diagramme gauche.

À la section précédente, on a remarqué qu'on peut écrire un diagramme de Ferrers en terme de partage, on peut faire de même pour les diagrammes gauches notés λ/μ , où $\mu \subseteq \lambda$. En fait, on supprime du diagramme λ les cases du diagramme μ . Ainsi, pour les partages $\lambda = 655421$ et $\mu = 422211$, la figure 1.9 représentant respectivement les diagrammes λ et μ , on a le diagramme gauche $\lambda/\mu = 655421/422211$ de la figure 1.10. On voit bien que le diagramme de la figure 1.10 correspond au premier diagramme de la figure 1.9 où les cases du second diagramme de la même figure ont été supprimées.

Un diagramme gauche est constitué de **composantes connexes** qui se définissent comme suit : chaque case d'une composante connexe touche à au moins une autre case

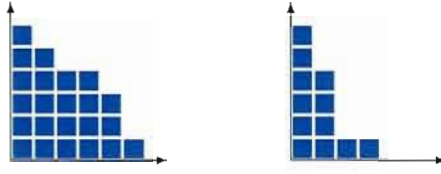


Figure 1.9 Diagrammes $\lambda = 655421$ et $\mu = 422211$.

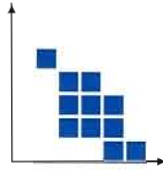


Figure 1.10 Diagramme de forme $\lambda/\mu = 655421/422211$.

de cette même composante en un côté (pas seulement en un sommet). On observe que ces composantes sont elles aussi des diagrammes gauches. Sur la figure 1.11, les couleurs aident à distinguer les trois composantes connexes du diagramme gauche. On qualifie

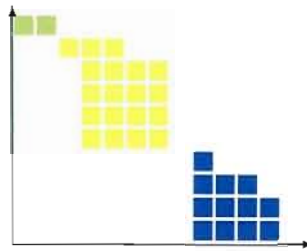


Figure 1.11 Diagramme gauche.

naturellement un diagramme gauche de **connexe** s'il possède une seule composante connexe.

La même fonction symétrique peut être réécrite de nombreuses façons sous la forme d'une fonction de Schur gauche. Celles-ci sont indexées par des diagrammes gauches, et on cherche à trouver les diagrammes gauches nécessaires à la représentation de ces fonctions de Schur gauche. Sans entrer dans les détails, qui feront l'objet de la section 3.1.1 du chapitre 3, on cherche ici à exploiter le fait que $s_{\lambda/\mu} = s_{\alpha/\beta}$ si le diagramme

λ/μ est liée à α/β par le simple déplacement de composantes connexes. En fait, il y a une infinité de diagrammes gauches donnant la même fonction de Schur gauche. Cette propriété de déplacement mène naturellement à la notion de **diagramme standardisé** qui permet de donner une présentation fini de l'ensemble des fonctions de Schur gauche de degré n . La définition de cette notion de diagramme standardisé passe par une notion de chemins sud-est dans le plan.

Un **chemin** dans le plan est comme une suite de points

$$(a_0, b_0) \rightarrow (a_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (a_n, b_n)$$

tel que

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) = \begin{cases} (a_i, b_i) \pm (0, 1) \\ (a_i, b_i) \pm (1, 0) \end{cases} \quad (1.2)$$

On appelle **pas** le couple $((a_i, b_i), (a_{i+1}, b_{i+1}))$ et ce pas est de type $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ ou $(0, -1)$ selon l'équation 1.2. La **longueur d'un chemin** est n s'il est constitué de n pas. On dit que (a_0, b_0) est le **point de départ** et que (a_n, b_n) est le **point d'arrivée**. À la figure 1.12 on peut voir le chemin

$$\begin{aligned} (1, 2) &\rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 4) \\ &\rightarrow (2, 4) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3) \end{aligned}$$

de longueur 10, de départ $(1, 2)$ et d'arrivée $(2, 3)$.

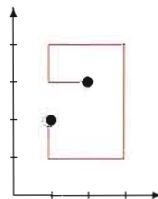


Figure 1.12 Chemin.

Un chemin $\gamma = (a_0, b_0) \rightarrow (a_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (a_n, b_n)$ avec des pas $(0, 1)$ et $(1, 0)$ demeure dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si $(a_0, b_0) \geq (0, 0)$. La figure 1.13 en est un exemple. De façon

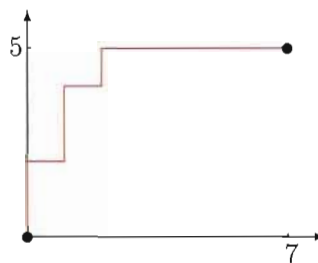


Figure 1.13 Chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

semblable, si l'on se restreint à des pas $(0, -1)$ et $(1, 0)$, avec point de départ $(0, b_0)$, $b > 0$ et les points (a_i, b_i) avec $a_i \geq 0$, alors on obtient aussi un chemin demeurant dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On peut en voir un à la figure 1.14.

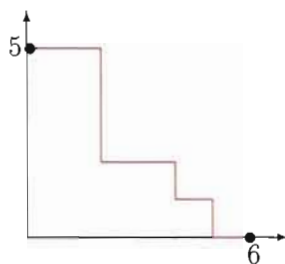


Figure 1.14 Chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Pour notre propos, on considère les chemins de ce type sous condition qu'ils se terminent sur la droite des abscisses (c'est-à-dire en un point $(a_n, 0)$). On a donc un chemin de la forme :

$$\gamma = (0, b_0) \rightarrow (a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_{n-2}, b_{n-2}) \rightarrow (a_{n-1}, b_{n-1}) \rightarrow (a_n, 0),$$

avec des pas $(1, 0)$ ou $(0, -1)$. Il est bien connu que le nombre de chemin allant de $(0, b)$ à $(a, 0)$ est donné par le coefficient binomial

$$\binom{a+b-2}{a-1}.$$

On peut coder ces chemins par une suite de x et y , avec x codant un pas de la forme $((a, b), (a, b) + (1, 0))$ et y codant un pas de la forme $((a, b), (a, b) - (0, 1))$. Le mot

résultant débute toujours par x et se termine par y . L'ensemble des chemins considérés s'identifie ainsi avec l'ensemble des mots de ce type, contenant b fois la lettre x et a fois la lettre y . Par exemple, le mot $xyxyxyxyy$ correspond au chemin de la figure 1.15.

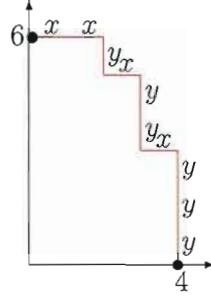


Figure 1.15 Chemin codé par $xyxyxyxyy$.

Soit φ un chemin en codé en x et y . Le nombre de lettres dans φ est représenté par $l(\varphi)$. Semblablement, $l_x(\varphi)$ et $l_y(\varphi)$ correspondent respectivement au nombre de x et y dans φ . Ainsi, pour φ , un chemin partant en $(0, b)$ et terminant en $(a, 0)$, on a $l_x(\varphi) = a$, $l_y(\varphi) = b$ et $l(\varphi) = a + b$. On définit aussi $\varphi|_i$ comme étant le préfixe de longueur i , donc $l(\varphi|_i) = i$ et $\varphi = \varphi|_i \cdot \alpha$, où α est un chemin codé en x et y . Par exemple, si $\varphi = xyxyxyxyy$, alors $\varphi|_4 = xyxy$ et $\varphi = \varphi|_4 \cdot \alpha$, où $\alpha = yxyxyy$. Pour terminer, le $i^{\text{ième}}$ point de φ est donné par

$$\pi_i(\varphi) := (l_x(\varphi|_i), l_y(\varphi) - l_y(\varphi|_i)).$$

L'ombre Ω d'un chemin γ correspond à l'ensemble de points :

$$\Omega(\gamma) := \bigcup_{a=0}^{n-1} \left(\bigcap_{b=0}^{n-1} \{(c, d) \mid (0, 0) \leq (c, d) < (a, b) \text{ où } (a, b) \in \gamma\} \right).$$

Par exemple, si

$$\begin{aligned} \gamma &= (0, 6) \rightarrow (1, 6) \rightarrow (2, 6) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 3) \\ &\rightarrow (4, 2) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 0), \end{aligned}$$

alors l'ombre de γ est égal à l'ensemble

$$\begin{aligned} \Omega(\gamma) = \{ & (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \\ & (1,5), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,0), (3,1), (3,2) \}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ainsi, l'ombre d'un chemin correspond à un diagramme de Ferrers. À la figure 1.16, on voit le diagramme représentant l'ensemble 1.3. En fait, en plaçant un soleil en $(a_n + 1, b_0 + 1)$ (ou $(5, 7)$ dans l'exemple), l'ombre d'un chemin γ est représentée par les cases à l'ombre du soleil.

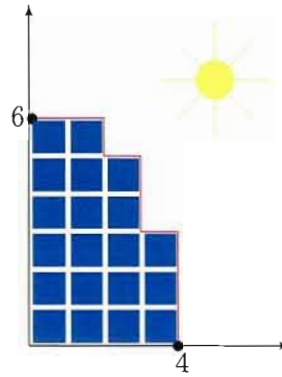


Figure 1.16 Exemple d'ombre d'un chemin.

Pour deux chemins γ et φ ayant le même point de départ et d'arrivée (plus formellement, $l_x(\gamma) = l_x(\varphi)$ et $l_y(\gamma) = l_y(\varphi)$), on a que $\gamma \leq \varphi$ si et seulement si pour tout i ,

$$l_x(\varphi|_i) \geq l_x(\gamma|_i) \quad \text{et}$$

$$l_y(\varphi|_i) \leq l_y(\gamma|_i).$$

En d'autre terme, $\gamma = (0, b_0) \rightarrow (a_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (a_n, 0)$ est plus petit que $\varphi = (0, d_0) \rightarrow (c_1, d_1) \rightarrow \dots \rightarrow (c_n, 0)$ si $(a_i, b_i) \leq (c_i, d_i)$ pour tout i , $b_0 = d_0$ et $a_n = c_n$. Par exemple, le chemin $\gamma = (0, 3) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 0)$ est plus petit que $\varphi = (0, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 0)$.

On peut maintenant caractériser les diagrammes gauches en terme de chemins de la façon suivante. Puisqu'on obtient un diagramme gauche en supprimant l'ombre d'un

chemin γ de l'ombre d'un chemin φ tel que $\gamma \leq \varphi$, on peut donc écrire les diagrammes gauches par des couples de chemins (γ, φ) tels que $\gamma \leq \varphi$. On observe qu'une telle description n'est pas unique. La figure 1.17 en est un exemple.

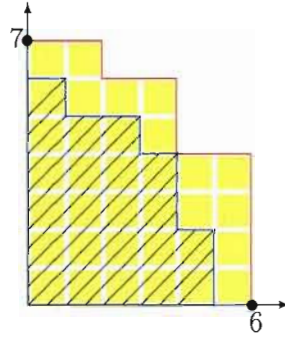


Figure 1.17 Deux chemins de longueurs 13 et diagramme gauche à 12 cases.

Afin de borner le nombre de descriptions potentielles de diagrammes gauches, on considère les notions suivantes. Un **segment commun** entre deux chemins

$$\begin{aligned}\gamma &= (a_0, b_0) \rightarrow (a_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (a_n, b_n) \text{ et} \\ \varphi &= (c_0, d_0) \rightarrow (c_1, d_1) \rightarrow \dots \rightarrow (c_n, d_n)\end{aligned}$$

est un pas tel que :

$$(a_i, b_i) \rightarrow (a_{i+1}, b_{i+1}) = (c_i, d_i) \rightarrow (c_{i+1}, d_{i+1}).$$

Si un chemin γ n'a pas de segment commun avec le chemin φ , alors le couple (γ, φ) caractérise un diagramme gauche dit **standardisé**. Par exemple, à la figure 1.18, le premier diagramme est standardisé, mais les deux autres ne le sont pas (les segments communs sont encerclés dans la figure). De plus, un diagramme gauche, formé par (γ, φ) , est standardisé si et seulement si pour tout i ,

$$\pi_i(\varphi) = \pi_i(\gamma) \Rightarrow \pi_{i+1}(\varphi) \neq \pi_{i+1}(\gamma).$$

On observe ainsi que (γ, φ) , où $\gamma \leq \varphi$, caractérise un diagramme gauche standardisé, si φ commence par x et termine par y , et, γ commence par y et termine par x . On peut

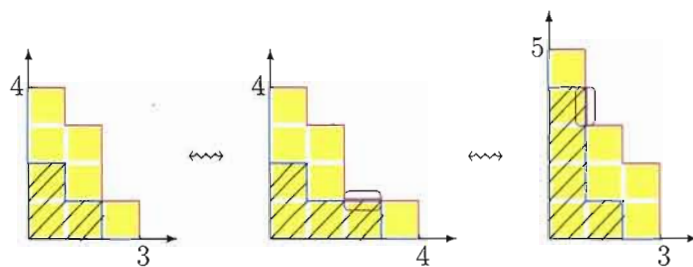


Figure 1.18 Diagramme gauche standardisé et diagrammes gauches non standardisés.

alors écrire

$$(\gamma, \varphi) = (y\alpha x, x\beta y) \quad (1.4)$$

Enfin, un diagramme gauche est standardisé si et seulement si ses composantes connexes se touchent en un point et s'il possède au moins une case touchant l'axe des abscisses et au moins une case touchant l'axe des ordonnées. Dans le même ordre d'idée, les diagrammes gauches connexes (vu plus tôt dans cette section) correspondent aux couples de chemins (γ, φ) tel que $\gamma \leq \varphi$ et qu'aucun point de γ n'est un point de φ . Autrement dit, pour tout i entre 1 et $l(\varphi) - 1$, on a

$$\pi_i(\gamma) \neq \pi_i(\varphi).$$

Au chapitre 3, on observe qu'il y a égalité entre les fonctions de Schur gauches indexées par respectivement les 3 diagrammes gauches de la figure 1.18. Ainsi, en observant seulement les diagrammes gauches standardisés, on approche de notre intention de trouver les seuls diagrammes gauches nécessaires à la représentation de l'ensemble partiellement ordonné des fonctions de Schur. C'est pourquoi, à partir de maintenant, on va considérer seulement les diagrammes gauches standardisés, ce qui allégera les propos.

Une **bande horizontale** est un diagramme qui a un maximum d'une case sur chaque colonne. On peut en voir des exemples à la figure 1.19. Dans un même ordre d'idée, on définit une **bande verticale** comme un diagramme qui possède au maximum une case sur chaque ligne. Naturellement, le conjugué d'une bande horizontale est verticale et vice-versa. On peut voir les conjugués des exemples de la figure 1.19 à la figure 1.20.



Figure 1.19 Bande horizontale.

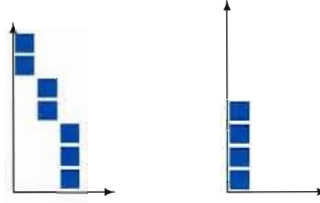


Figure 1.20 Bande verticale.

On peut qualifier un diagramme gauche de **ruban** si son diagramme est formé d'une seule composante connexe et si cette composante ne contient pas de diagramme de forme 22. On peut voir un exemple de ruban et de non-ruban à la figure 1.21. On observe que le conjugué d'un ruban est un ruban.



Figure 1.21 Ruban et non ruban.

Finalement, on qualifie de **pseudo-ruban** un diagramme gauche dont les composantes connexes ont la forme de ruban. On peut en voir quelques-uns à la figure 1.22.

Soit (γ, φ) et (γ', φ') , des couples de chemins caractérisant deux diagrammes gauches standardisés. L'opération de **concaténation** \cdot entre ces diagrammes se définit par

$$(\gamma, \varphi) \cdot (\gamma', \varphi') = (\gamma\gamma', \varphi\varphi')$$

De plus, l'**empilement** \oplus entre les deux diagrammes s'obtient par

$$(y\alpha x, x\beta y) \oplus (y\alpha' x, x\beta' y) = (y\alpha y\alpha' x, x\beta y\beta' y).$$

Les lettres en bleu sont celles qui disparaissent lors de l'empilement et celles en rouge,

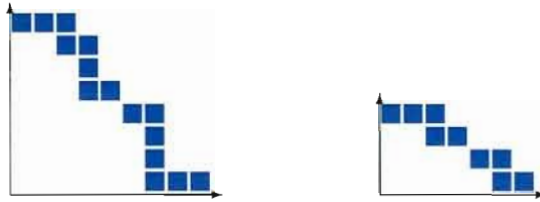


Figure 1.22 Pseudo-ruban.

celles qui se retrouvent au centre des chemins. De façon plus imagée, lors de l'empilement, on superpose les diagrammes de manière à retrouver la colonne la plus à droite de (γ, φ) au dessus de la colonne la plus à gauche de (γ', φ') . Le **recollement** \odot de diagrammes se trouve par l'équation suivante (avec respectivement le même code de couleur)

$$\begin{aligned} (\gamma, \varphi) \oplus (\gamma', \varphi') &= (y\alpha x, x\beta y) \oplus (y\alpha' x, x\beta' y) \quad \text{par l'équation 1.4} \\ &= (y\alpha x\alpha' x, x\beta x\beta' y). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on dispose les diagrammes de façon à ce que la plus basse ligne de (γ, φ) se trouve à gauche de la plus haute ligne du (γ', φ') . Par exemple, la concaténation $41 \cdot 322$, l'empilement $41 \oplus 322$ et le recollement $41 \odot 322$ donne respectivement les diagrammes gauches de la figure 1.23.

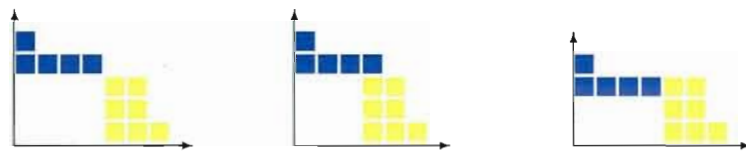


Figure 1.23 Concaténation, empilement et recollement des diagrammes 41 et 322.

Tableau

Naïvement, un **tableau** est un diagramme où on «place» un entier dans chaque case. Ainsi, on fait du diagramme $E = \{(1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (0, 4), (1, 4), (2, 4)\}$

un tableau τ en remplissant les cases comme suit

$$\begin{aligned}\tau(1,0) &= 9 & \tau(2,0) &= 5 & \tau(0,1) &= 2 \\ \tau(1,1) &= 3 & \tau(1,2) &= 2 & \tau(0,4) &= 4 \\ \tau(1,4) &= 5 & \tau(2,4) &= 4.\end{aligned}$$

Ce tableau est illustré à la figure 1.24.

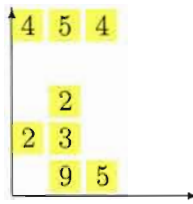


Figure 1.24 Tableau.

Un peu plus formellement, un tableau τ , de forme $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et à valeur dans $A \subseteq \mathbb{N}$, est simplement une fonction $\tau : E \rightarrow A$. On dit que le tableau est **injectif** si la fonction τ l'est. Le **contenu** τ d'un tableau consiste à donner la fréquence d'apparition de chacune des valeurs dans le tableau. Pour présenter ces fréquences on utilise un produit formel $1^{a_1}2^{a_2}\dots$, où a_i est la fréquence de i dans le tableau. Lorsque $a_i = 0$, on n'écrit pas i dans le produit formel. Même si le tableau et le contenu du tableau sont tous deux représentés par τ , on différencie facilement le sens de τ selon le contexte. Le contenu du tableau de la figure 1.24 est $2^23^14^25^29^1$. On assigne aussi au tableau un **monôme du contenu** x_τ . On le construit à partir de τ tel que l'indice i de la variable x_i est une valeur du tableau et l'exposant j de x_i^j est la fréquence de la valeur i dans le tableau. Le monôme du contenu associé au tableau de la figure 1.24 est $x_\tau = x_2^2x_3x_4^2x_5^2x_9$.

On parle aussi de **mot** dans le contexte des tableaux. Un mot associé à un tableau se compose des valeurs du tableau. Il est lu de droite à gauche et de bas en haut. Dans le contexte des mots, on appelle les valeurs du tableau des **lettres**. Le mot associé au tableau 1.24 est 59322454 et la 2^{ième} lettre du mot est 9. On qualifie un **mot de Yamanouchi** s'il suit la règle suivante : si s est la $i^{\text{ème}}$ lettre d'un mot et $r < s$, alors

le nombre d'occurrence de s doit être inférieur ou égal à r dans les i premières lettres de ce mot. Ainsi, le mot 112**3**1**3**2 n'est pas de Yamanouchi puisqu'à la sixième position, on retrouve le deuxième **3** et il y a une seule occurrence de **2** dans les six premières lettres. En permutant les deux dernières lettres du mot on obtient 1123123, soit un mot de Yamanouchi.

On peut qualifier un tableau de semi-standard et de standard. Plus précisément, un tableau τ est dit **semi-standard** si on a

$$\begin{aligned} \tau(i, j) &\leq \tau(k, j) & \text{si } i < k & \text{ et} \\ \tau(i, j) &< \tau(i, k) & \text{si } i < k. \end{aligned}$$

En changeant les valeurs du tableau de la figure 1.24, on peut obtenir le tableau semi-standard de la figure 1.25.

2	5	5
	4	
1	3	
	1	1

Figure 1.25 Tableau semi-standard.

De façon similaire, un tableau τ à n cases est **standard** s'il est possible de faire une bijection entre l'ensemble des valeurs du tableau et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, et, si on a

$$\begin{aligned} \tau(i, j) &< \tau(k, j) & \text{si } i < k & \text{ et} \\ \tau(i, j) &< \tau(i, k) & \text{si } i < k. \end{aligned}$$

Ainsi, à la figure 1.26 on trouve des tableaux standards.

Un tableau est dit **de Young** si sa forme est celle d'un diagramme de Ferrers. Semblablement, si la forme du tableau est celle d'un diagramme gauche, on dit qu'il s'agit d'un **tableau gauche**. La figure 1.27 montre respectivement un tableau de Young et un tableau gauche.



Figure 1.26 Tableau standard.

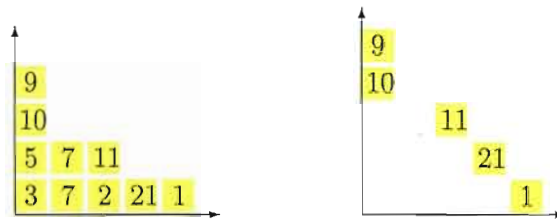


Figure 1.27 Tableau de Young et tableau gauche.

1.3 Ensemble partiellement ordonné

On rappelle que le but de ce travail est l'étude de la Schur positivité de différences de fonctions de Schur gauche. On va voir que cette étude passe naturellement par la description d'un ordre partiel sur ces fonctions. Il est donc important de rappeler quelques notions de base sur les ensembles partiellement ordonnés.

Définitions générales

Une **relation d'ordre partiel** sur un ensemble X est une relation binaire \leq qui possède les propriétés de réflexivité ($\forall x, x \leq x$), d'anti-symétrie ($\forall x, \forall y, x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$) et de transitivité ($\forall x, \forall y, \forall z, x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$). On dit alors que X est un **ensemble partiellement ordonné** par \leq , ou encore on utilise l'abréviation anglaise **poset** signifiant *partially ordered set*. La relation d'inclusion entre sous-ensembles d'un ensemble donné est un exemple classique de relation d'ordre partiel.

Le **suprémum** de deux éléments a, b d'un poset est, s'il existe, le plus petit élément

c tel qu'avec la relation d'ordre \leq on a $a \leq c$ et $b \leq c$. On écrit alors $\sup(a, b) = c$. Semblablement, l'**infimum** de a et b est le plus grand élément d , s'il existe, tel que $d \leq a$ et $d \leq b$, c'est-à-dire $\inf(a, b) = d$. On peut en voir un exemple à l'aide du diagramme de la figure 1.28.

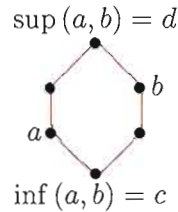


Figure 1.28 Infimum et suprémum.

Un **treillis** est un ensemble partiellement ordonné pour lequel chaque paire d'élément a, b admet un suprémum et un infimum.

L'**élément minimal** $\hat{0}$ d'un poset est le plus petit élément de ce poset, c'est-à-dire que pour tout élément a , $\inf(\hat{0}, a) = \hat{0}$. On dit aussi qu'un élément b **couvre** a si $a < b$ et si $a \leq c \leq b$, alors $a = c$ ou $c = b$. Pour $a < b$ dans un poset, une **chaîne** qui va de a à b est une suite d'élément $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k$ du poset tel que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$. De plus, si a_{i+1} couvre a_i , on indique alors que la chaîne est **maximale**. Un poset est **gradué** si et seulement si pour tout élément a du poset, chaque chaîne maximale entre $\hat{0}$ et a est de la même longueur k . On dit alors que k est le **niveau** de a .

Ordres sur les partages

L'ensemble des partages est partiellement ordonné via la relation d'inclusion (considérant les partages comme sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Cette relation se traduit en termes de parts par :

$$\lambda \subseteq \mu \text{ si et seulement si } \lambda_i \leq \mu_i \text{ pour tout } i.$$

Pour des partages λ et μ ,

$$\sup(\lambda, \mu) = \lambda \cup \mu \text{ et}$$

$$\inf(\lambda, \mu) = \lambda \cap \mu.$$

Autrement dit, les parts du partage $\sup(\lambda, \mu)$ sont $\max\{\lambda_i, \mu_i\}$ et celles de $\lambda \cap \mu$ sont $\min\{\lambda_i, \mu_i\}$. On peut voir graphiquement la relation d'ensemble des partages à l'aide du **treillis de Young**. Les 4 premiers niveaux du treillis de Young se retrouvent à la figure 1.29. On y a inscrit les partages de 0 à 4 ainsi que leurs diagrammes correspondants. On remarque que ce poset est gradué et que les partages $\lambda \vdash n$ sont tous au niveau n .

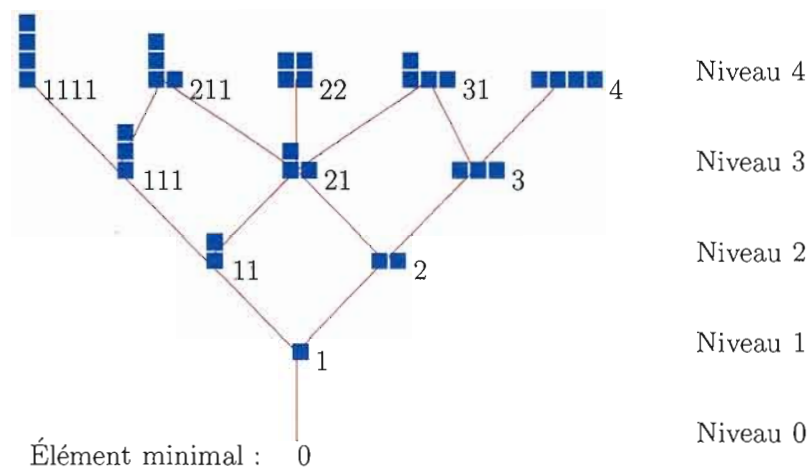


Figure 1.29 Treillis de Young.

L'ordre de dominance \preceq est un autre ordre partiel entre partages, mais on compare ici des partages d'un même entier. On pose $\lambda \preceq \mu$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \mu_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\leq \mu_1 + \mu_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Si l'on considère les partages de 6, on a $411 \preceq 42$ et $33 \preceq 42$, mais 411 et 33 ne sont pas comparables. La figure 1.30 illustre ce phénomène.

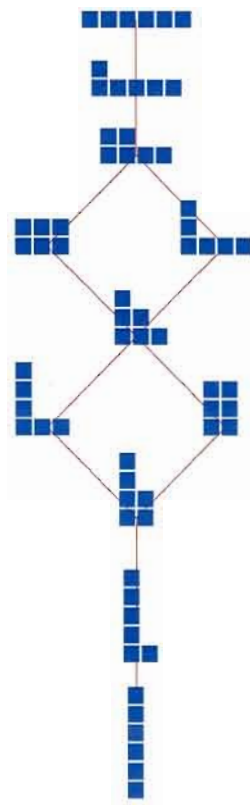


Figure 1.30 Ordre de dominance des partages de 6.

CHAPITRE II

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Les fonctions symétriques sont les fonctions qui demeurent inchangées par permutation de variables. L'ensemble de ces fonctions possède des propriétés très intéressantes, particulièrement au point de vue des bases et changements de bases. Les changements de base font intervenir des constantes essentielles telles que les nombres de Kostka, qui interviennent lorsqu'on passe de la base des fonctions de Schur à la base des fonctions monomiales. L'intérêt de ces nombres pour le présent mémoire apparaît lorsqu'on exprime un produit de fonctions de Schur en terme de fonctions monomiales. On obtient alors des expressions qui mélangent nombres de Kostka et coefficients de Littlewood-Richardson. Semblablement, le passage de la base des fonctions élémentaires à la base des fonctions de Schur fait aussi intervenir les nombres de Kostka, et d'autres expressions de même nature sont obtenues. Les conventions de notations de Stanley tirées de [20] ont servi en majeure partie à l'écriture de ce chapitre.

2.1 L'algèbre graduée des fonctions symétriques

Cette première section sert à introduire la notion de **fonction symétrique** dans $\mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$. Techniquement parlant, une fonction symétrique est une série formelle

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha},$$

où les coefficients c_{α} satisfont les conditions

$$c_{\alpha} = c_{\sigma \cdot \alpha} \tag{2.1}$$

pout tout α et toute permutation σ (voir section 1.1). L'utilisation des termes fonctions et polynômes ne servent ici qu'à distinguer la situation où il y a une infinité de variables et celle où ce nombre est fini. Dans les deux cas, les objets considérés sont dans $\mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$.

On dit qu'une fonction symétrique est **homogène de degré d** si tous ses monômes sont de degré d . Par exemple, si $d = 4$, on peut avoir

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & 3x_1^2x_2x_3 + 3x_1x_2^2x_3 + 3x_1x_2x_3^2 + \dots \\ & + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Manifestement, on peut écrire toute fonction symétrique, de façon unique, comme somme de ses **composantes homogènes**. Chacune de ces composantes homogènes est symétrique. La composante homogène Q^d de degré d de $\mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$ est constituée des séries formelles (symétriques)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

Alors, l'anneau $\mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$ se décompose comme

$$\mathbb{Q}[[\mathbf{x}]] = Q^0 \oplus Q^1 \oplus Q^2 \oplus \dots,$$

avec la somme évidente, et le produit «usuel» des séries formelles.

On désigne par $\Lambda^d \subseteq Q^d$ (respectivement Λ_n^d), l'**espace vectoriel des fonctions symétriques** (respectivement des polynômes symétriques à n variables) homogènes de degré d . En effet, il est clair que pour $f, g \in \Lambda^d$, on a $af + bg \in \Lambda^d$ quel que soit $a, b \in \mathbb{Q}$. De plus, pour $f \in \Lambda^c$ et $g \in \Lambda^d$, on vérifie facilement que $fg = gf \in \Lambda^{c+d}$. On obtient donc que Λ est une algèbre graduée. En formule, on a

$$\Lambda = \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^d.$$

Tous ces énoncés sont valables pour $\Lambda_n = \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda_n^d$. Pour passer de Λ à Λ_n , il suffit de substituer $x_k = 0$ pour tout $k > n$. Autrement dit, les identités obtenues dans le contexte d'un nombre infini de variables se spécialisent sans problème au cas fini. Le seul point délicat concerne la dimension (comme espace vectoriel) de Λ_n^d versus celle de Λ , mais on y reviendra.

2.2 Bases principales des fonctions symétriques

Sans discréditer les autres bases, celles qu'on voit sont les principales, dans le sens où elles serviront à l'étude des coefficients de Littlewood-Richardson que l'on retrouve lors d'un produit de fonctions de Schur ou lorsqu'on discute des fonctions de Schur gauches. Comme on a dit dans l'introduction de ce chapitre, l'étude des nombres de Kostka peut aider à la compréhension des inégalités des coefficients dont on fait particulièrement l'étude. De plus, porter un regard sur d'autres bases des fonctions symétriques peut mener à plusieurs autres discussions intéressantes en lien avec le sujet de notre propos.

Fonctions symétriques monomiales

La base de Λ^d la plus évidente est peut-être celle des **fonctions symétriques monomiales**. Elles consistent en une famille de fonctions symétriques indexées par les partages d'entiers α . Elles se définissent comme suit, pour $\lambda \vdash d$.

$$m_\lambda = m_\lambda(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha \in \mathbb{S}_\lambda} x^\alpha,$$

considérant λ comme la liste infinie $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, 0, 0, 0, \dots)$ pour $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$. La sommation a donc lieu sur l'ensemble de suites α qui sont des permutations distinctes de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$. Par exemple, avec $\lambda = 421$, on a :

$$m_{421} = \sum_{i,j,k} x_i^4 x_j^2 x_k.$$

Les fonctions symétriques m_λ sont clairement homogènes de degré $d = |\lambda|$. L'ensemble $\{m_\lambda\}_{\lambda \vdash d}$, de ceux dont $m_\lambda \neq 0$, forme une base de Λ^d . En effet, en vertu de 2.1 on peut exprimer tout élément de Λ^d comme combinaison linéaire de fonctions symétriques monomiaux par :

$$f = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda m_\lambda.$$

Le fait que 2.2 donne $f = 3m_{211} + m_4$ l'illustre bien.

Dans le cas des polynômes, on a que la dimension de Λ_n^d est égale à la cardinalité de l'ensemble $\{\lambda \mid |\lambda| \leq \text{nombre de variables}, \lambda \vdash d\}$. Bien sûr, si $k > n$, alors $m_\lambda(\mathbf{x}) = 0$.

On observe ici que l'expression $f = 3m_{211} + m_4$ est indépendante du nombre de variables. Par exemple, avec deux variables, on obtient la même fonction, mais avec $m_{211}(x_1, x_2)$ qui est nul :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 3m_{211}(x_1, x_2) + m_4(x_1, x_2) \\ &= m_4(x_1, x_2). \end{aligned}$$

On regarde les polynômes monomiaux à 3 variables et de degré $d = 4$ pour mieux visualiser cette base des fonctions symétriques.

$$\begin{aligned} m_{1111}(x_1, x_2, x_3) &= 0, \\ m_{211}(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3, \\ m_{22}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2, \\ m_{31}(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2^3 + x_1x_3^3 + x_2x_3^3 + x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_3, \\ m_4(x_1, x_2, x_3) &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4, \\ m_0(x_1, x_2, x_3) &= 1. \end{aligned}$$

On remarque que tout est plus simple si le nombre de variables est infini.

Fonctions symétriques élémentaires

Une deuxième base présentée ici est celle des **fonctions symétriques élémentaires**. Pour $p \in \mathbb{N}$, les fonctions élémentaires e_p se définissent à l'aide de la somme suivante :

$$e_p = e_p(\mathbf{x}) := \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}.$$

On peut regarder par exemple les polynômes élémentaires à trois variables suivants :

$$\begin{aligned} e_0(x_1, x_2, x_3) &= 1 &= m_0(x_1, x_2, x_3), \\ e_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 &= m_1(x_1, x_2, x_3), \\ e_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= m_{11}(x_1, x_2, x_3), \\ e_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3 &= m_{111}(x_1, x_2, x_3), \\ e_4(x_1, x_2, x_3) &= 0 &= m_{1111}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Comme on peut le remarquer, $e_p = m_{1^p}$ pour $p \in \mathbb{N}$. Plus généralement, pour un partage λ , on définit les fonctions symétriques élémentaires e_λ par

$$e_\lambda := e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_k}.$$

Puisque les fonctions élémentaires peuvent s'écrire en produit de fonctions symétriques monomiales, il est clair que les fonctions élémentaires sont symétriques. Ainsi, en prenant $\lambda = 21$ et les polynômes à trois variables, on obtient :

$$\begin{aligned} e_{21} &= e_2(x_1, x_2, x_3) e_1(x_1, x_2, x_3) \\ &= \left(\sum_{i < j} x_i x_j \right) \left(\sum_i x_i \right) \\ &= (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) (x_1 + x_2 + x_3) \\ &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + 3 x_1 x_2 x_3 \\ &= m_{21} + 3 m_{111}. \end{aligned}$$

On observe que cette identité est en fait valable quel que soit le nombre n de variables. En effet, si $n \leq 2$, alors l'identité correspond à $0 = 0$. Si $n = 2$ on a

$$\begin{aligned} x_1 x_2 (x_1 + x_2) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \text{ et} \\ m_{111}(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

ce qui donne $e_{21}(\mathbf{x}) = m_{21}(\mathbf{x}) + 0$. Et, pour $n \geq 3$, on a toujours $e_{21}(\mathbf{x}) = m_{21}(\mathbf{x}) + m_{111}(\mathbf{x})$. C'est exactement ce phénomène qui correspond au fait qu'on peut simplifier notre discours en passant au contexte des fonctions symétriques. Autrement dit, les identités obtenues dans le contexte des fonctions symétriques (infinité de variables) restent valables lorsqu'on se restreint à un nombre fini de variables. Il devient ainsi clair qu'on peut négliger de spécifier les variables dans ces identités obtenues.

On peut aussi écrire les fonctions élémentaires en somme de fonctions monomiales : $e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} m_\mu$ où $M_{\lambda\mu}$ sont les coefficients qui font parties d'une matrice de passage inversible entre les fonctions monomiales et élémentaires. D'ailleurs l'inverse de cette matrice permet d'écrire les fonctions monomiales en somme de fonctions élémentaires :

$m_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} M'_{\mu\lambda} e_\lambda$. Ainsi,

$$\begin{array}{ll}
 e_1 = m_1 & m_1 = e_1, \\
 e_2 = m_{11} & m_{11} = e_2, \\
 e_{11} = m_2 + 2m_{11} & m_2 = e_{11} - 2e_2, \\
 e_3 = m_{111} & m_{111} = e_3, \\
 e_{21} = m_{21} + 3m_{111} & m_{21} = e_{21} - 3e_3, \\
 e_{111} = m_3 + 3m_{21} + 6m_{111} & m_3 = e_{111} - 3e_{21} + 3e_3.
 \end{array}$$

Les matrices de la figure 2.1 représentent le passage entre les fonction monomiales et élémentaires pour $\lambda \vdash 3$. Ce sont des matrices inversibles.

$$\begin{pmatrix} m_{111} & m_{21} & m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_{21} \\ e_{111} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_{111} & e_{21} & e_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_3 \\ m_{21} \\ m_{111} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figure 2.1 Matrices de passage entre fonctions monomiales et élémentaires.

On a donc que $\{e_\lambda \mid \lambda \vdash d \text{ et la plus grande part de } \lambda \text{ est plus petite ou égal à } n\}$ est aussi une bases de Λ_n^d . La plus grande part de λ doit être plus petite que n , sinon on obtient $e_\lambda = 0$.

Fonctions symétriques homogènes

Une autre base intéressante est celle des **fonctions symétriques homogènes** qui se dénotent h_λ . Comme l'annonce le nom de ces fonctions, h_λ est homogène de degré $|\lambda|$. Voyons d'abord pour un entier p , positif ou nul, ce que donne h_p . Comme on vient de le mentionner, cette fonction est composée de monômes dont le degré est p . Si $p = 0$, on a que $h_0 = 1$, sinon, on a

$$h_p = h_p(\mathbf{x}) := \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}.$$

On a les formes suivantes avec trois variables :

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 = m_0, \\ h_1 &= x_1 + x_2 + x_3 = m_1, \\ h_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = m_2 + m_{11}, \\ h_3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3, \\ &= m_3 + m_{21} + m_{111}. \end{aligned}$$

Bien entendu, pour obtenir le développement :

$$h_4 = m_4 + m_{31} + m_{22} + m_{211} + m_{1111},$$

on doit travailler avec 4 variables. On peut remarquer que h_p est égale à la somme sur les partages μ de p des fonctions monomiales. C'est à dire que $h_p = \sum_{\mu \vdash p} m_\mu$.

Tout comme pour les fonctions élémentaires, lorsqu'on écrit h_λ , on fait référence au produit de fonctions homogènes avec chacune des parts de λ tel que

$$h_\lambda := h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_k}.$$

Ainsi, le polynôme homogène à trois variables du partage $\lambda = 21$ est :

$$h_{21} = h_2 h_1 = m_3 + 2 m_{21} + 3 m_{111}.$$

De même que dans la section 2.2, on peut écrire les bases homogènes en monomiales et inversement, les monomiales en homogènes. On observe les premiers exemples de ce

changement de bases comme suit :

$$\begin{aligned}
h_1 &= m_1 & m_1 &= h_1, \\
h_2 &= m_2 + m_{11} & m_2 &= -h_{11} + 2h_2, \\
h_{11} &= m_2 + 2m_{11} & m_{11} &= h_{11} - h_2, \\
h_3 &= m_3 + m_{21} + m_{111} & m_3 &= h_{111} - 3h_{21} + 3h_3, \\
h_{21} &= m_3 + 2m_{21} + 3m_{111} & m_{21} &= -2h_{111} + 5h_{21} - 3h_3, \\
h_{111} &= m_3 + 3m_{21} + 6m_{111} & m_{111} &= h_{111} - 2h_{21} + h_3.
\end{aligned}$$

Il existe ici aussi une matrice de passage inversible entre les fonctions homogènes et les fonctions monomiales. Les matrices de la figure 2.2 en sont de bons exemples.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} m_{111} & m_{21} & m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_3 \\ h_{21} \\ h_{111} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} h_3 & h_{21} & h_{111} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_{111} \\ m_{21} \\ m_3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Figure 2.2 Matrices de passage entre fonctions monomiales et homogènes.

On écrit les deux sommes suivantes : $h_\lambda = \sum_{\mu \vdash d} N_{\lambda\mu} m_\mu$ et $m_\mu = \sum_{\lambda \vdash d} N'_{\mu\lambda} h_\lambda$, où on a que $N_{\lambda\mu}$ et $N'_{\mu\lambda}$ sont des matrices de passage inverse. On obtient que l'ensemble $\{h_\lambda \mid \lambda \vdash d, l(\lambda) \leq n\}$ est aussi une base de Λ_n^d .

Fonctions symétriques de Schur

Cette section, bien que portant sur la base principale de notre sujet principal, est très limitée. C'est dû au fait que le chapitre suivant porte exclusivement sur les fonctions de Schur gauches qui se définissent semblablement aux fonctions de Schur. De plus, on trouve dans le prochain chapitre des propriétés de fonctions de Schur qui se généralisent aux fonctions de Schur gauches, d'où le choix de ne pas les inscrire dans cette section. D'un autre côté, bien que limitée, on introduit les fonctions de Schur dans cette section puisqu'elles forment, au même titre que les fonctions monomiales, homogènes et élémentaires, une base des fonctions symétriques.

À la section 1.2, on a montré qu'il existe un lien entre les partages et les tableaux. Cette observation a été faite dans le but d'expliquer les fonctions symétriques dont on porte un intérêt particulier, c'est-à-dire les **fonctions de Schur** s_λ . À cet égard, on souligne que les fonctions s_λ comptent le nombre de tableaux de Young semi-standards de forme λ . Il est surprenant et intéressant de constater que ces fonctions, en plus d'être symétriques, forment une autre base des fonctions symétriques.

Avant de les définir plus formellement, il est pertinent de considérer un exemple. La figure 2.3 énumère tous les types (évitant les répétitions inutiles) de tableaux de Young semi-standards de forme $\lambda = 32$ et dont les valeurs sont comprises dans l'ensemble $\{a, b, c, d, e\} \subset \mathbb{N}$, avec $a < b < c < d < e$. On peut remarquer que sous chacun de ces tableaux, il y a un polynôme en terme de \mathbf{x} . Ce polynôme est le polynôme associé au contenu du tableau comme vu à la section 1.2.

La somme de tous les monômes qui peuvent s'obtenir à partir des tableaux apparaissant à la figure 2.3 (avec a, b, c, d, e quelconque), donne lieu à la fonction symétrique :

$$\begin{aligned}
 s_{32}(\mathbf{x}) = & (x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + \dots + x_{45}^2 x_{78}^3 + \dots) + (x_1^3 x_2 x_3 + \dots + x_{21} x_{32}^3 x_{129} + \dots) \\
 & + 2(x_1^2 x_2^2 x_3 + \dots + x_{21}^2 x_{43} x_{562}^2 + \dots) \\
 & + 3(x_1^2 x_2 x_3 x_4 + \dots + x_2 x_{37} x_{66}^2 x_{91} + \dots) \\
 & + 5(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + \dots + x_7 x_{13} x_{24} x_{35} x_{68} + \dots).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\begin{array}{ c c } \hline b & b \\ \hline a & a & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & c \\ \hline a & a & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & b \\ \hline a & a & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & c \\ \hline a & a & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & b \\ \hline a & a & c \\ \hline \end{array}$
$x_a^3 x_b^2$	$x_a^3 x_b x_c$	$x_a^2 x_b^3$	$x_a^2 x_b^2 x_c$	$x_a^2 x_b^2 x_c$
$\begin{array}{ c c } \hline b & c \\ \hline a & a & c \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & c \\ \hline a & a & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & c \\ \hline a & a & d \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & d \\ \hline a & a & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & d \\ \hline a & a & c \\ \hline \end{array}$
$x_a^2 x_b x_c^2$	$x_a^2 x_b x_c^2$	$x_a^2 x_b x_c x_d$	$x_a^2 x_b x_c x_d$	$x_a^2 x_b x_c x_d$
$\begin{array}{ c c } \hline b & c \\ \hline a & b & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & c \\ \hline a & b & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & c \\ \hline a & b & d \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & d \\ \hline a & b & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & d \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$
$x_a x_b^3 x_c$	$x_a x_b^2 x_c^2$	$x_a x_b^2 x_c x_d$	$x_a x_b^2 x_c x_d$	$x_a x_b^2 x_c x_d$
$\begin{array}{ c c } \hline b & c \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & c \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & d \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & c \\ \hline a & b & d \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & d \\ \hline a & c & c \\ \hline \end{array}$
$x_a x_b^2 x_c^2$	$x_a x_b x_c^3$	$x_a x_b x_c^2 x_d$	$x_a x_b x_c^2 x_d$	$x_a x_b x_c^2 x_d$
$\begin{array}{ c c } \hline d & d \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & d \\ \hline a & b & d \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & d \\ \hline a & c & d \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline d & e \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline c & d \\ \hline a & b & e \\ \hline \end{array}$
$x_a x_b x_c x_d^2$	$x_a x_b x_c x_d^2$	$x_a x_b x_c x_d^2$	$x_a x_b x_c x_d x_e$	$x_a x_b x_c x_d x_e$
	$\begin{array}{ c c } \hline c & e \\ \hline a & b & d \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & e \\ \hline a & c & d \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline b & d \\ \hline a & c & e \\ \hline \end{array}$	
	$x_a x_b x_c x_d x_e$	$x_a x_b x_c x_d x_e$	$x_a x_b x_c x_d x_e$	

Figure 2.3 Tableau de forme $\lambda = 32$ de contenu $a < b < c < d < e$.

On observe que ceci peut aussi s'écrire

$$s_{32}(\mathbf{x}) = m_{32} + m_{311} + 2m_{221} + 3m_{2111} + 5m_{11111}. \quad (2.4)$$

Plus généralement, on définit les fonctions de Schur à l'aide de la somme suivante :

$$s_\lambda = s_\lambda(\mathbf{x}) := \sum_{\tau} \mathbf{x}_\tau,$$

où τ est un tableau de Young semi-standard de forme λ et où \mathbf{x}_τ désigne le monôme en terme de \mathbf{x} associé au contenu du tableau τ . On a aussi que $s_0 = 1$. On montre à la section 3.1 que ces fonctions sont symétriques.

Lorsque le nombre de variables est assez grand, l'établissement de développements tels que l'équation 2.3 devient un problème purement combinatoire. De fait, toutes les identités entre fonctions symétriques deviennent beaucoup plus simple si on fait abstraction des variables.

Pour illustrer ce phénomène, on observe que l'on a l'identité

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash |\lambda|} K_{\lambda\mu} m_\mu,$$

où les coefficients $K_{\lambda\mu}$ sont appelés les **nombre de Kostka**. Ceux-ci correspondent au nombre de tableaux semi-standards de Young de la forme λ et dont les fréquences des valeurs, contenues dans le tableau λ , sont dans μ . On rappelle à l'aide d'un exemple que les fréquences des valeurs du premier tableau de la deuxième ligne de la figure 2.3 est 221 puisqu'il y a 2 a , 2 c et 1 b . On peut aussi voir un exemple de la relation entre fonctions de Schur et fonctions monomiales à l'aide des équations 2.3 et 2.4.

Il est amusant de remarquer qu'on peut écrire les fonctions monomiales en terme de fonctions de Schur à l'aide de l'équation suivante :

$$m_\mu = \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\mu\lambda} s_\lambda \quad \text{encore les nombres de Kostka !}$$

CHAPITRE III

FONCTIONS DE SCHUR GAUCHES

Les fonctions de Schur se généralisent pour donner lieu aux fonctions de Schur gauches. La description de ces fonctions de Schur gauches fait intervenir un couple de partage (λ, μ) avec $\mu \subseteq \lambda$. Cependant, il y a une infinité de couples distincts donnant lieu à la même fonction de Schur gauche, dénotée $s_{\lambda/\mu}$. Le problème de l'égalité $s_{\lambda/\mu} = s_{\alpha/\beta}$ est en fait difficile, et il n'est pas encore résolu de façon satisfaisante. On va donner une partie de la réduction de la description de l'ensemble infini des indexations possibles à un ensemble fini. Cependant, l'indexation ne sera pas toujours unique.

3.1 Fonctions de Schur gauches

Les fonctions de **Schur gauches** $s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}(\mathbf{x})$, où $\mu \subseteq \lambda$, s'obtiennent en considérant tous les tableaux semi-standard (croissant sur les lignes et strictement croissant sur les colonnes) dont le diagramme a la forme λ/μ (voir section 1.2). Un tel tableau est un remplissage d'un diagramme gauche λ/μ , avec $\mu \subseteq \lambda$. Ainsi, on définit les fonctions de Schur gauches à l'aide de la somme suivante :

$$s_{\lambda/\mu} := \sum_{\tau} \mathbf{x}_{\tau},$$

où τ est un tableau gauche semi-standard de forme λ/μ et où \mathbf{x}_{τ} désigne le monôme en terme de \mathbf{x} associé au contenu du tableau τ .

Il n'est pas immédiatement évident que ces fonctions sont symétriques, on va le vérifier combinatoirement. Mais avant de le faire, on considère l'exemple de la figure 3.1 qui

correspond à la fonction $s_{331/21}$.

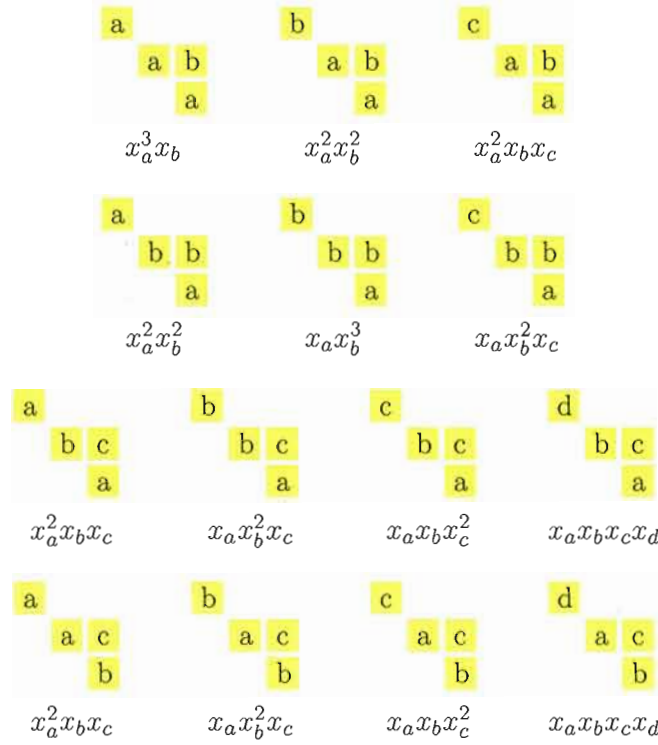


Figure 3.1 Tableau de forme $\lambda = 331/21$ et de contenu $a < b < c < d$.

On remarque que le diagramme gauche correspondant aux tableaux de la figure 3.1 comprend deux composantes connexes (voir section 1.2) qui donnent chacune lieu à une fonction de Schur gauche. De plus, les remplissage de ces tableaux correspondant à chacune de ces composantes connexes peuvent être considérées indépendamment. L'une de ces composante (celle qui se trouve en haut à gauche) correspond à une seule case. La valeur de cette case peut être choisie indépendamment du remplissage de l'autre composante connexe. En termes de fonctions de Schur gauches, la première composante est égale à s_1 et la seconde à $s_{22/1}$ (la section 3.1.1 donne plus d'information au sujet d'égalités entre fonctions de Schur gauches). L'indépendance de ces remplissages

correspond à l'identité :

$$s_{331/21} = s_1 \cdot s_{21}.$$

À la section 3.2, on va exploiter ce genre de propriété pour mieux comprendre le produit de fonctions de Schur gauches. On verra entre autre qu'une fonction de Schur gauche $s_{\lambda/\mu}$ est le produit des fonctions de Schur gauches associées à chacun des diagrammes correspondants aux composantes connexes de λ/μ .

Proposition 3.1.1 *Les fonctions de Schur gauches sont symétriques.*

Preuve Soit $s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ une fonction de Schur gauche. Par exemple, soit λ/μ le tableau de la figure 3.2. Étant donné que toute permutation peut s'expri-

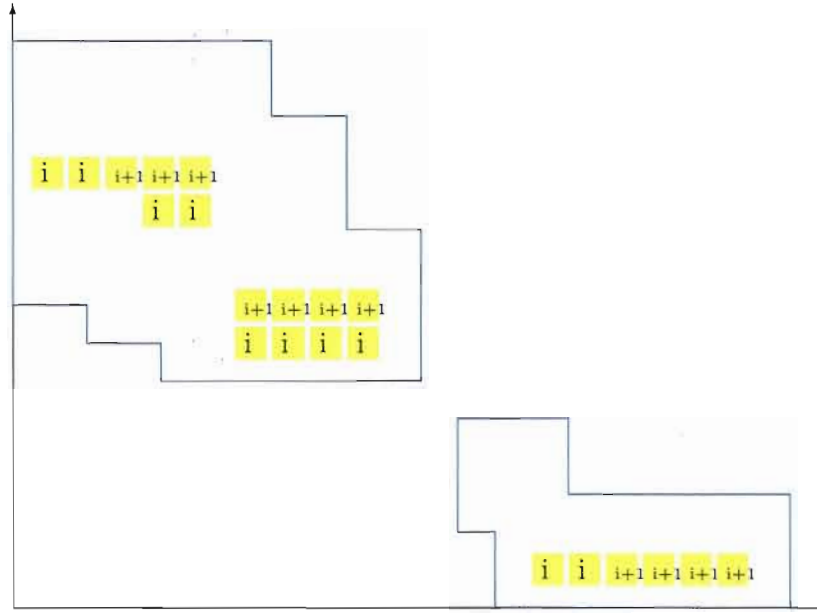


Figure 3.2 Tableau gauche λ/μ .

mer comme produit de transpositions adjacentes (voir section 1.1), il suffit de montrer que

$$s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n).$$

En d'autres termes que

$$s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \dots + CY x_i^a x_{i+1}^b Z + \dots + CY x_i^b x_{i+1}^a Z + \dots,$$

où C est un coefficient, et, Y et Z sont respectivement des monômes en les variables de x_1, \dots, x_{i-1} et x_{i+2}, \dots, x_n . Autrement dit, on doit montrer qu'on a le même nombre C de tableaux gauches semi-standards correspondant au monôme $Y x_i^a x_{i+1}^b Z$ qu'au monôme $Y x_i^b x_{i+1}^a Z$.

Grossièrement, il suffit de remplacer, dans les tableaux gauches semi-standards de forme λ/μ , les valeurs i par $i+1$ et inversement. Il suffit ensuite effectuer un ajustement pour que les tableaux restent semi-standards.

Plus précisément, on peut trouver des plages maximales de cases telles qu'illustré à la figure 3.3. Par maximale, on veut dire qu'il n'y a pas deux cases superposées comprenant

$$\begin{array}{ccccc} i+1 & i+1 & \dots & i+1 & \\ i & i & \dots & i & \\ \hline & & m & & \end{array},$$

Figure 3.3 Tableau de forme mm et de contenu $i < i+1$.

les valeurs i et $i+1$ juste avant ou juste après cette plage. On peut remarquer que le monôme associé à ce tableau est $x_i^m x_{i+1}^m$ et il est déjà symétrique. Ainsi, lorsqu'on retrouve cette forme dans le tableau de forme λ/μ , on ne fait rien.

Ensuite, lorsqu'on voit les formes telles que dans la figure 3.4, c'est-à-dire où les j premières cases ont la valeur i et les k cases suivantes ont la valeur $i+1$, et où j et k sont plus grandes ou égales à 0. Dans ces cas, on doit remplacer les cases de valeurs i

$$\begin{array}{ccccccc} i & i & \dots & i & i+1 & \dots & i+1 \\ \hline & & j & & k & & \end{array},$$

Figure 3.4 Tableau de forme $j+k$ et de contenu $i < i+1$.

par $i+1$ et inversement, de sorte qu'on ait encore un tableau semi-standard, c'est-à-dire que les k premières cases ont la valeur i et les j dernières cases ont la valeur $i+1$ comme on peut le voir à la figure 3.5.

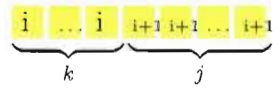


Figure 3.5 Tableau de forme $k + j$ et de contenu $i < i + 1$.

Il reste à montrer que ceci ne cause pas de problèmes dans les tableaux de forme λ/μ . S'il n'y a pas de forme tel que la figure 3.3 collée à la figure 3.4, alors on obtient la figure 3.6, où la zone bleue représente des cases qui sont de valeurs plus petites ou égales à

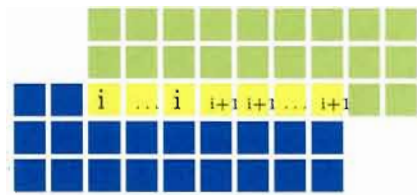


Figure 3.6 Tableau gauche contenant la forme $j + k$.

$i - 1$ et la zone verte représente des cases qui sont de valeurs plus grandes ou égales à $i + 2$. Ceci est dû au fait que c'est un tableau semi-standard. Ainsi, à l'aide de l'inversion des i et $i + 1$ décrite plus tôt, il n'y a pas de problèmes.

Il reste encore quatre formes à vérifier. Celles-ci correspondent aux quatre façons d'avoir la forme de la figure 3.3 collée à celle de la figure 3.4. Dans les figures 3.7 à 3.10, comme précédemment, les cases bleues correspondent à des cases de valeurs plus petites que i et les cases vertes correspondent à des cases de valeurs plus grandes que $i + 1$. Ainsi, si l'on observe les deux premiers cas qui sont aux figures 3.7 et 3.8, on remarque qu'avec les inversions de i et $i + 1$ décrites précédemment. C'est à dire qu'on ne touche pas à ce

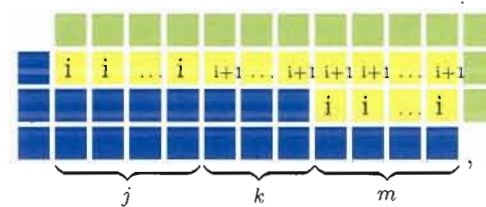


Figure 3.7 Premier cas, tableau gauche contenant les figures 3.3 et 3.4.

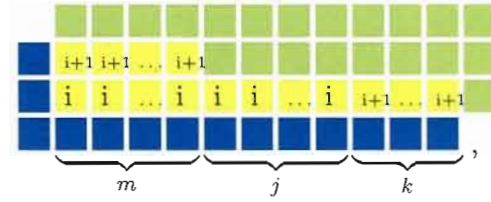


Figure 3.8 Deuxième cas, tableau gauche contenant les figures 3.3 et 3.4.

qui ressemble à un rectangle $m \times 2$ et qu'on inverse avec ajustement ce qui ressemble à un rectangle $(k + j) \times 1$. Il n'y a donc pas de problèmes pour ces deux cas étant donné les cases vertes et bleues.

Pour ce qui est des cas représentés aux figures 3.9 et 3.10. On peut remarquer que les figures comprennent des cases de couleur rouge. Celles-ci correspondent à des cases qui doivent être plus petite que $i + 1$ et plus grande que i , mais c'est impossible.

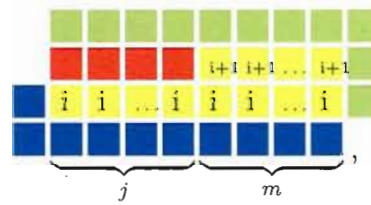


Figure 3.9 Troisième cas, tableau gauche contenant les figures 3.3 et 3.4.

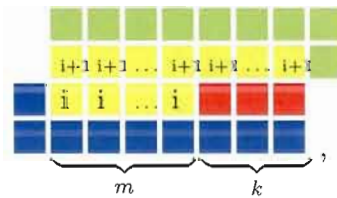


Figure 3.10 Quatrième cas, tableau gauche contenant les figures 3.3 et 3.4.

Ces deux formes ne sont donc pas à considérer. Il faut remarquer que l'on peut toujours décomposer les formes comprenant les valeurs i et $i + 1$, afin de se référer aux cas représentés aux figures 3.3, 3.6, 3.7 et 3.8. On peut le voir à l'aide de la figure 3.11. Ainsi, en considérant qu'on peut avoir des combinaisons des formes précédentes

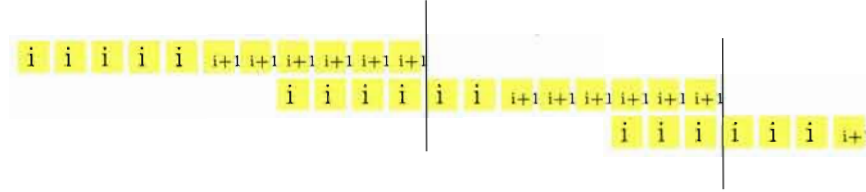


Figure 3.11 Découpage des formes comprenant des cases de valeurs i ou $i + 1$.

dans les tableaux gauches λ/μ , on remarque qu'on peut trouver le même nombre de tableaux gauches semi-standards comprenant le monôme $Y x_i^a x_{i+1}^b Z$ que ceux de monôme $Y x_i^b x_{i+1}^a Z$. \square

De plus, on peut écrire toute fonction de Schur en terme de fonctions de Schur gauches à l'aide de $s_{\lambda/\emptyset} = s_\lambda$. De la propriété de symétrie et du fait que l'ensemble des fonctions de Schur forme une base des fonctions symétriques, on en déduit qu'on peut écrire les fonctions de Schur gauches en termes de fonctions de Schur à l'aide de la somme :

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu \vdash (|\lambda| - |\mu|)} c_{\nu\mu}^\lambda s_\nu, \quad (3.1)$$

où les $c_{\nu\mu}^\lambda$ sont les coefficients de Littlewood-Richardson qui sont décrits plus en détail à la section 3.2.

3.1.1 Égalité entre fonctions de Schur gauches

Plusieurs recherches ont été effectuées au sujet de l'égalité entre fonctions de Schur gauches indexées par des diagrammes gauches. Il n'est pas possible d'exposer en profondeur toutes les facettes de ce sujet dans ce mémoire. Pour plus de détails, on peut se référer aux article suivants : [5], [16], [17] et [23].

Plus précisément, on cherche les conditions sur les couples (λ, μ) et (α, β) pour que

$s_{\lambda/\mu} = s_{\alpha/\beta}$. Ceci donne lieu à une relation d'égalité entre couples qu'on désigne par $(\lambda, \mu) \sim (\alpha, \beta)$. Pour illustrer le fait que cette relation d'égalité n'est pas triviale, on considère le cas où α/β est obtenu de λ/μ par une rotation de 180° . On peut faire correspondre à chaque tableau de la forme λ/μ le tableau de forme $2222/111$ obtenu par rotation. Bien que le tableau résultant n'est pas semi-standard, on peut le «redresser» en procédant comme aux figures 3.12 et 3.13. On observe donc assez facilement que $s_{2111} = s_{2222/111}$ et $s_{2211/1} = s_{2221/11}$.

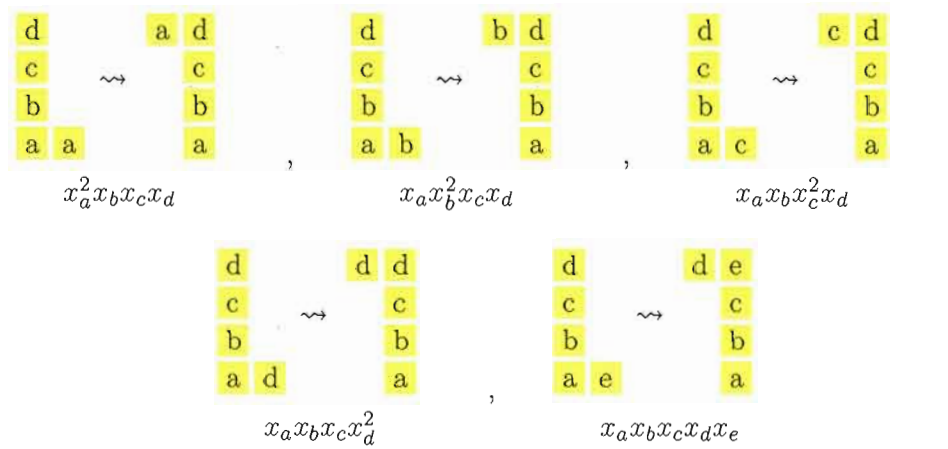


Figure 3.12 Tableau de forme 2111 et 2222/111, $a < b < c < d < e$.

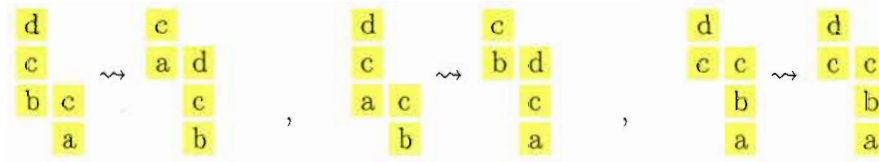


Figure 3.13 Tableaux semi-standard de forme 2211/1 et 2221/11, $a < b < c < d$.

En second lieu, il est assez évident que si l'on «déplace» les composantes connexes (vues à la section 1.2) d'un diagramme, alors les fonctions de Schur gauches correspondantes sont égales. Ceci est dû au fait qu'une fonction de Schur gauche $s_{\lambda/\mu}$ est égale au produit des fonctions de Schur gauches indexées par les composantes connexes de λ/μ . De ce fait, on peut montrer que les seuls diagrammes gauches nécessaires à la représentation des

fonctions de Schur gauches sont les diagrammes gauches standardisés. On a illustré cette égalité à la figure 3.14. On rappelle que des diagrammes gauches sont dits standardisés lorsque toutes les composantes connexes se touchent en un point et où au moins une case a un côté situé sur l'axe des abscisses et au moins une case a un côté situé sur l'axe des ordonnées. Autrement dit, l'ensemble des fonctions $s_{\lambda/\mu}$ est standardisé et est égal à l'ensemble de toutes les fonctions de Schur gauches.

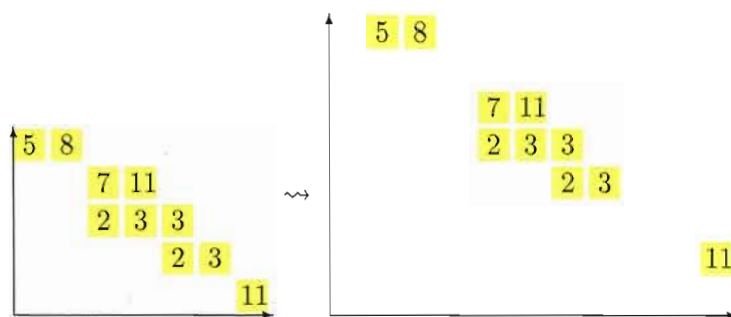


Figure 3.14 Espacement entre composantes connexes.

Une simple extension de cette discussion permet de constater l'égalité entre fonctions de Schur gauches dont les diagrammes (qu'on peut supposer standardisé) sont obtenus l'un de l'autre par permutation (voir figure 3.15) des composantes connexes. Dans ces deux cas, l'égalité résulte du fait qu'une fonction de Schur gauche est égale au produit des fonctions de Schur gauches indexées par les diagrammes correspondants aux composantes connexes.

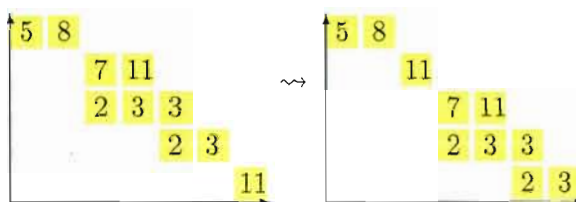


Figure 3.15 Permutations des composantes connexes.

Les résultats précédents sont relativement faciles à comprendre, mais il existe plusieurs

cas où il est plus difficile de saisir pourquoi il y a égalité. Les diagrammes de la figure 3.16 donnent lieu à des fonctions de Schur gauches égales, (voir [17] de Peter R.W. McNamara et Stephanie Van Willigenburg).

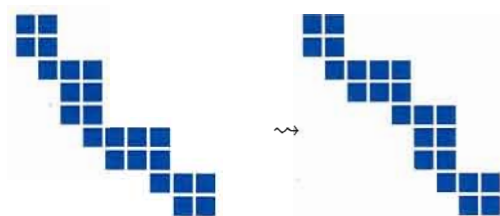


Figure 3.16 Exemple tiré de [17].

À l'aide du «principe des tiroirs» et du fait qu'on nécessite seulement des diagrammes gauches standardisés pour la représentation des fonctions de Schur gauches $s_{\lambda/\mu}$, où $\lambda/\mu \vdash n$, on peut montrer que ces diagrammes standardisés se retrouvent tous sous la droite passant par $(n+1, 0)$ et $(0, n+1)$ dans le plan $n \times n$. On peut d'ailleurs le visualiser à l'aide de la figure 3.17. À la section 1.2, on a décrit les diagrammes gauches

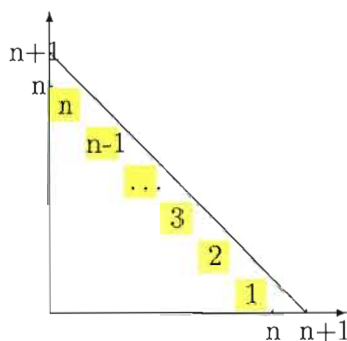


Figure 3.17 Tableau de dimension $n \times n$.

à l'aide de chemin. On a aussi vu le nombre de chemins allant de $(0, b)$ à $(a, 0)$ est donné par le coefficient binomial

$$\binom{a+b-2}{a-1}.$$

Ainsi, il y a un nombre fini de diagrammes gauches nécessaires à la représentation des

fonctions de Schur gauches $s_{\lambda/\mu}$, où $\lambda/\mu \vdash n$ et ce nombre est plus petit ou égal à

$$\binom{2n-2}{n-1}.$$

3.2 Produit de fonctions de Schur ou fonctions de Schur gauches

Pour analyser la multiplication des fonctions de Schur, il est pertinent de commencer par un exemple. Le produit $s_{31} \cdot s_{21}$ s'écrit, dans la base des fonctions de Schur, sous la forme suivante :

$$s_{31} \cdot s_{21} = s_{52} + s_{511} + s_{43} + 2s_{421} + s_{4111} + s_{331} + s_{322} + s_{3211}.$$

On peut voir cette décomposition à l'aide de la figure 3.18 où les fonctions ont été remplacées par les diagrammes correspondant aux partages indexés. On fait remarquer que « \cdot » ne désigne pas la concaténation de diagrammes ici (même si l'on va voir que $s_{31} \cdot s_{21} = s_{31 \cdot 21}$).

$$\begin{array}{c} \text{Diagram for } s_{31} \cdot s_{21} = \text{Diagram for } s_{52} + \text{Diagram for } s_{511} + \text{Diagram for } s_{43} + 2 \text{Diagram for } s_{421} + \text{Diagram for } s_{4111} + \text{Diagram for } s_{331} + \text{Diagram for } s_{322} + \text{Diagram for } s_{3211} \end{array} \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram for } s_{31} \cdot s_{21} = \text{Diagram for } s_{52} + \text{Diagram for } s_{511} + \text{Diagram for } s_{43} + 2 \text{Diagram for } s_{421} + \text{Diagram for } s_{4111} + \text{Diagram for } s_{331} + \text{Diagram for } s_{322} + \text{Diagram for } s_{3211} \end{array} \quad (3.3)$$

Figure 3.18 Diagrammes correspondants aux indexes de $s_{32}s_{21}$.

À l'aide de cet exemple, on constate que les diagrammes correspondant au produit $s_{31} \cdot s_{21}$ sont des distributions des cases du diagramme correspondant à s_{21} sur le diagramme correspondant à s_{31} (voir les diagrammes de l'addition 3.2), ou encore, des distributions

des cases du diagramme correspondant à s_{31} sur le diagramme correspondant à s_{21} (voir les diagrammes de l'addition 3.3). On observe qu'il y a un coefficient 2 devant la fonction de Schur s_{421} . C'est le genre d'expression, incluant les coefficients, que permet de calculer la règle de Littlewood-Richardson.

De façon plus formelle, le produit de deux fonctions de Schur s'écrit sous la forme suivante :

$$s_{\lambda} \cdot s_{\mu} = \sum_{\theta \vdash |\lambda| + |\mu|} c_{\lambda\mu}^{\theta} s_{\theta},$$

où les $c_{\lambda\mu}^{\theta}$ sont appelés les **coefficients de Littlewood-Richardson**. Ils sont obtenus en comptant certains tableaux gauches semi-standards de forme θ/λ , de contenu μ et dont le mot associé est de Yamanouchi. Ces notions ont tous été introduites à la fin de la section 1.2.

Dans l'exemple du produit de $s_{31} \cdot s_{21}$, on doit remplir les cases jaunes des diagrammes de l'addition 3.2 avec deux copies du nombre 1 et une fois le nombre 2 tel que le mot lu est de Yamanouchi. Les mots lus sont donc 112 ou 121, mais pas 211, qui n'est pas de Yamanouchi. On observe à la figure 3.19 que le seul cas où on a plusieurs possibilité de remplissage (et dont les mots associés sont de Yamanouchi) correspond au partage 421. En échangeant les rôles de s_{21} et s_{31} , on obtient une description différente de la même expression faisant intervenir les mots 1112, 1121 et 1211, puisque le produit est commutatif.

À la section précédente on montre qu'une fonction $s_{\lambda/\mu}$ est égale au produit de fonctions de Schur gauches indexées par les diagrammes correspondant aux composantes connexes de λ/μ . Semblablement, un produit de fonctions de Schur gauches est égal à une fonction de Schur gauche, c'est-à-dire :

$$s_{\mu/\nu} s_{\alpha/\beta} = s_{\lambda/\theta}.$$

En fait, $s_{\mu/\nu} s_{\alpha/\beta} = s_{\mu/\nu \cdot \alpha/\beta}$, où $\mu/\nu \cdot \alpha/\beta$ est la concaténation de diagramme vu à la figure 1.23. On peut voir à l'aide du diagramme de la figure 3.20 que les composantes

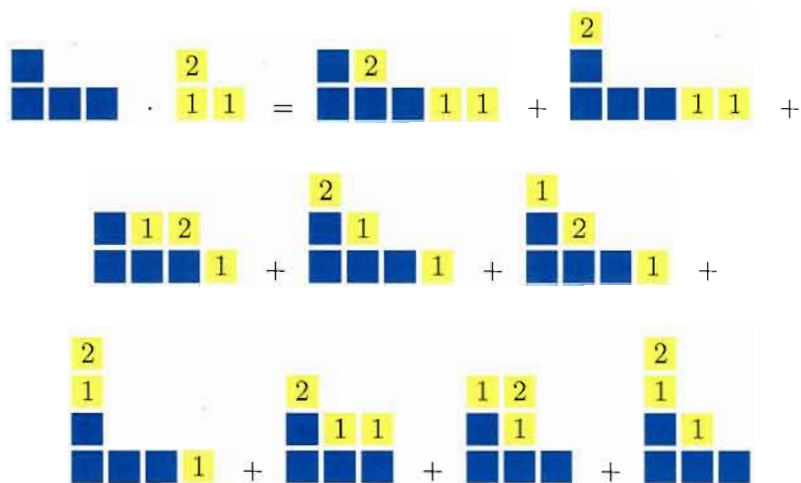


Figure 3.19 Produit illustré par les diagrammes indexés aux fonctions de Schur.

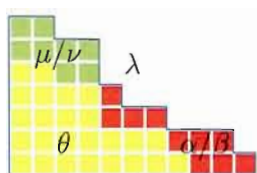


Figure 3.20 $s_{\mu/\nu}s_{\alpha/\beta} = s_{\lambda/\theta}$.

connexes de μ/ν et α/β sont les composantes connexes de λ/θ . Bien entendu cette remarque s'applique au cas des fonctions de Schur considérées fonctions de Schur gauche par $s_{\lambda/0}$. Par exemple, le produit $s_{31}s_{32}$ est égal à $s_{5421/22}$ ou encore $s_{5432/33}$ (voir la figure 3.21).

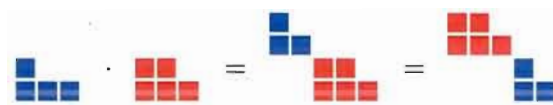


Figure 3.21 $s_{31}s_{32} = s_{5421/22} = s_{5432/33}$.

3.3 Résultat sur le produit de fonctions de Schur

Le **produit scalaire** usuel dans le cas des fonctions de Schur est défini par :

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a vu à l'équation 3.1 que les fonctions de Schur gauches se calculent aussi à l'aide des coefficients de Littlewood-Richardson. En terme de produit scalaire, que les coefficients de Littlewood-Richardson sont égaux à

$$c_{\lambda\mu}^\theta = \langle s_\lambda s_\mu, s_\theta \rangle \text{ et} \quad (3.4)$$

$$c_{\lambda\mu}^\theta = \langle s_{\theta/\mu}, s_\lambda \rangle. \quad (3.5)$$

Ainsi, on retrouve les coefficients de Littlewood-Richardson dans les trois sommes suivantes :

$$\begin{aligned} s_\mu s_\nu &= \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda, \\ s_{\lambda/\mu} &= \sum_\nu c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu, \\ s_{\lambda/\nu} &= \sum_\mu c_{\mu\nu}^\lambda s_\mu. \end{aligned} \quad (3.6)$$

On dira qu'on a **multiplicité simple** dans le cas où le produits de fonctions de Schur ne fait intervenir que des coefficients de Littlewood-Richardson tous égaux à 0 ou 1. Par exemple, le produit

$$s_{31} \cdot s_{21} = s_{52} + s_{511} + s_{43} + 2s_{421} + s_{4111} + s_{331} + s_{322} + s_{3211}$$

n'a pas une multiplicité simple car le résultat comprend 2 fois la fonction s_{421} . Par contre,

$$s_{21} s_{11} = s_{32} + s_{311} + s_{221} + s_{2111}$$

est de multiplicité simple.

Un cas général de multiplicité simple correspond à la **formule de Pieri**. Cette formule affirme que pour un entier p et un partage μ à k parts,

$$s_\mu s_p = \sum_{\lambda} s_\lambda, \quad (3.7)$$

où λ varie dans l'ensemble des partages de $p + |\mu|$ et tel que $\mu \subseteq \lambda$ et λ/μ est une bande horizontale (voir la figure 1.19). Par exemple, le produit $s_{31}s_3$ est représenté à la figure 3.22.

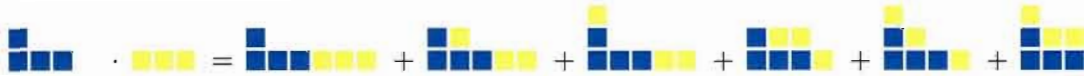


Figure 3.22 Développement de $s_{31}s_3$.

On a remarqué à la section 1.2 que le diagramme conjugué d'une bande horizontale est une bande verticale (voir la figure 1.20). On a donc une formule de Pieri duale :

$$s_\mu s_{1^p} = \sum_{\lambda} s_\lambda, \quad (3.8)$$

où λ varie dans l'ensemble des partages de $|\mu| + p$ avec $\mu \subseteq \lambda$ et λ/μ une bande verticale. On a donc l'identité de la figure 3.23.

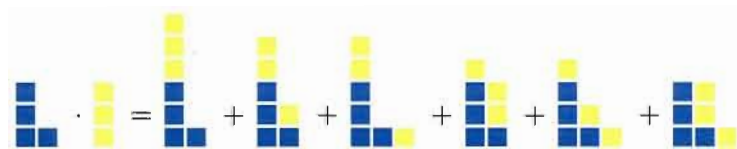


Figure 3.23 Développement de $s_{211}s_{111}$.

La remarque précédente est due au fait qu'on a une **involution** ω sur l'anneau des fonctions symétriques telle que $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$, où λ' est le conjugué de λ vu à la figure

1.3. Cette involution étant linéaire et multiplicative, il en résulte qu'on a l'égalité

$$\begin{aligned} s_{\lambda'} s_{\mu'} &= \omega(s_{\lambda} s_{\mu}) = \omega\left(\sum_{\theta} c_{\lambda\mu}^{\theta} s_{\theta}\right) = \sum_{\theta} c_{\lambda\mu}^{\theta} \omega(s_{\theta}) \\ &= \sum_{\theta} c_{\lambda\mu}^{\theta} s_{\theta'} = \sum_{\theta'} c_{\lambda'\mu'}^{\theta'} s_{\theta'}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il en résulte aussi qu'en général

$$c_{\lambda\mu}^{\theta} = c_{\lambda'\mu'}^{\theta'}$$

puisque les fonctions de Schur sont linéairement indépendante. De plus, on a $\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{(\lambda/\mu)'}$. À l'aide des équations 3.6, on trouve une reformulation de la formule de Pieri en terme de fonctions de Schur gauches comme suit :

$$s_{\lambda/p} = \sum_{\mu} s_{\mu}, \quad (3.10)$$

avec $\mu \subseteq \lambda$ et λ/μ une bande horizontale de longueur p . De même, on a

$$s_{\lambda/1^p} = \sum_{\mu} s_{\mu}, \quad (3.11)$$

avec $\mu \subseteq \lambda$ et λ/μ une bande verticale de longueur p .

Un théorème de Stembridge caractérise les situations de multiplicité simple pour les produits de fonctions de Schur. On peut en retrouver la preuve dans l'article [21]. Les diagrammes discutés dans ce théorème ont été vus aux figures 1.4, 1.5 et 1.6.

Théorème 3.3.1 (Stembridge [21])

Le produit de $s_{\lambda}s_{\mu}$ est de multiplicité simple si et seulement si

1. μ ou λ est un rectangle d'une ligne ou d'une colonne, ou
2. μ est un rectangle à deux lignes et λ est une équerre épaisse (ou vice versa), ou
3. μ est une rectangle et λ est un presque rectangle (ou vice-versa), ou
4. μ et λ sont des rectangles.

Le premier point du théorème découle de la formule de Pieri. Pour ce qui est des 3 autres points, on va en voir des exemples. Pour les numéros 2 et 3, on prend par exemple $s_{32}s_{22}$

et ainsi les seuls mots permis sont 1122 et 1212. En plaçant les 1 et les 2 dans les cases jaunes de la figure 3.24, on remarque que dans chaque cas il y a une seule façon de les disposer.

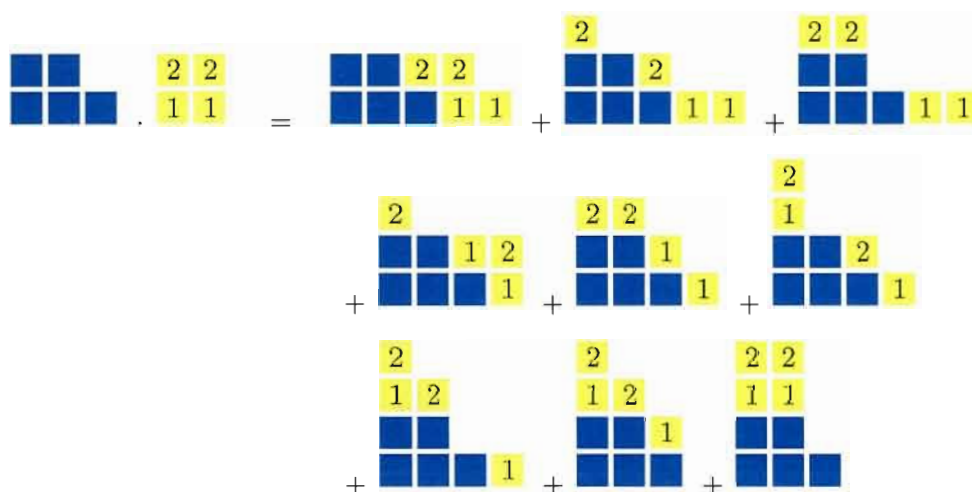


Figure 3.24 Diagrammes des partages indexés aux produits $s_{32}s_{22}$.

Par exemple pour le quatrième cas du théorème, soit $s_{44}s_{222}$, on doit alors remplir les cases jaunes de la figure 3.25 par deux copies des nombres 1, 2 et 3. Les mots de Yamanouchi possibles sont 112233, 112323, 121233, 121323 ou 123123. Les seuls

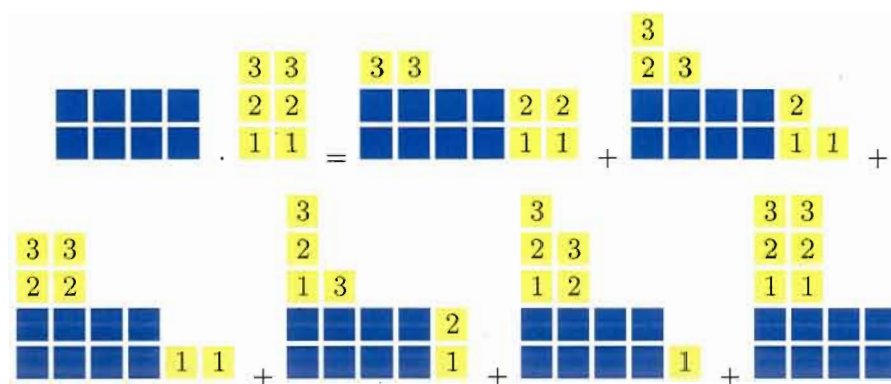


Figure 3.25 Diagrammes des partages indexés aux produits $s_{44}s_{222}$.

remplissages possibles pour chacun de ces diagrammes sont uniques en respectant les mots de Yamanouchi et on a ainsi un produit de multiplicité simple.

3.4 Schur positivité

Dans cette section, on étudie la Schur positivité de différences de produit de fonctions de Schur, ainsi que des résultats permettant de la démontrer.

Différence de produits de fonctions de Schur s -positive

Une différence de produits de fonctions symétriques dite **Schur positive** (ou s -positive) est une différence dont le résultat est exclusivement positif en termes de fonctions de Schur. Par exemple,

$$m_{111}m_{11} - m_{2111} = s_{221} + s_{11111}$$

est une différence s -positive tandis que

$$s_{32}s_{211} - s_{33}s_{21} = -s_{54} + s_{5211} + s_{4311} + s_{4221} + s_{42111} + s_{33111} + s_{32211}$$

ne l'est pas en raison de la différence du terme s_{54} dans la solution.

Dans le présent mémoire, on s'intéresse tout particulièrement aux s -positives résultant de différences de produits de fonctions de Schur. De l'équation 3.4, on déduit que

$$s_{\alpha}s_{\beta} \leq s_{\mu}s_{\nu} \text{ si et seulement si pour tout } \lambda \text{ on a } \langle s_{\alpha}s_{\beta}, s_{\lambda} \rangle \leq \langle s_{\mu}s_{\nu}, s_{\lambda} \rangle \quad (3.12)$$

$$\left(\text{c'est-à-dire } c_{\alpha\beta}^{\lambda} \leq c_{\mu\nu}^{\lambda} \right).$$

Autrement dit, la différence $s_{\mu/\nu} - s_{\alpha/\beta}$ est Schur positive si et seulement si $c_{\alpha\beta}^{\lambda} \leq c_{\mu\nu}^{\lambda}$ pour tout λ . On a vu à l'équation 3.9 que l'involution d'un produit $s_{\lambda}s_{\mu}$ donne $s_{\lambda'}s_{\mu'}$ et que $c_{\lambda\mu}^{\theta} = c_{\lambda'\mu'}^{\theta'}$. Ainsi, $s_{\mu}s_{\nu} - s_{\alpha}s_{\beta}$ est s -positif si et seulement si $s_{\mu'}s_{\nu'} - s_{\alpha'}s_{\beta'}$ l'est.

Le **support** d'un produit $s_{\lambda}s_{\mu}$ correspond à l'ensemble des partages θ tel que $c_{\lambda\mu}^{\theta} > 0$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \text{supp}(s_{32}s_{211}) &= \{531, 5211, 441, 432, 4311, 4221, 42111, 3321, 33111, 32211\} \text{ et} \\ \text{supp}(s_{33}s_{21}) &= \{54, 531, 441, 432, 4311, 3321\}. \end{aligned}$$

On voit bien que $\text{supp}(s_{32}s_{211}) \not\subseteq \text{supp}(s_{33}s_{21})$ et $\text{supp}(s_{32}s_{211}) \not\subseteq \text{supp}(s_{33}s_{21})$. On peut en déduire que $s_{32}s_{211} - s_{33}s_{21}$ et $s_{33}s_{21} - s_{32}s_{211}$ ne sont pas s -positifs. On observe cependant que $\text{supp}(s_\alpha s_\beta) \subseteq \text{supp}(s_\mu s_\nu)$ n'implique pas la Schur positivité puisque l'inégalité $c_{\alpha\beta}^\lambda \leq c_{\mu\nu}^\lambda$ n'est pas nécessairement vraie pour tout λ .

L'étude de la multiplicité simple via les supports de produits est intéressante ici puisqu'en obtenant une inclusion de support de produits ayant des multiplicités simples, on obtient une différence Schur positive. Autrement dit, si $\text{supp}(s_\alpha s_\beta) \subseteq \text{supp}(s_\mu s_\nu)$ où $s_\alpha s_\beta$ et $s_\mu s_\nu$ sont de multiplicité simple, alors $s_\mu s_\nu - s_\alpha s_\beta$ est Schur positif.

Une équation intéressante à voir ici a été trouvée et démontrée par Kirillov dans [10], et reprouvée par Kleber dans [11]. On conseille d'ailleurs ce dernier article pour voir la preuve de l'équation suivante :

$$s_{m^k} s_{m^k} = s_{(m+1)^k} s_{(m-1)^k} + s_{m^{k+1}} s_{m^{k-1}}. \quad (3.13)$$

La figure 3.26 aide à visualiser cette équation. De cette équation, on en déduit que



Figure 3.26 Exemple de l'équation de Kirillov.

$s_{m^k} s_{m^k} - s_{(m+1)^k} s_{(m-1)^k}$ et $s_{m^k} s_{m^k} - s_{m^{k+1}} s_{m^{k-1}}$ sont des différences Schur-positives.

En lien avec notre intérêt principal, l'article [12] de Lam, Postnikov et Pylyavskyy fournit un théorème de Schur positivité. Avant de l'énoncer, on définit une opération qui s'effectue sur les partages. On place en ordre décroissant les parts de deux partages (λ, μ) , qui seront notées $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_p$ et on définit, à l'aide de ces parts, deux autres partages $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ tel que $\tilde{\lambda} = (\gamma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_{p-1})$ et $\tilde{\mu} = (\gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_p)$. Cette opération qu'on appelle l'**opération tilde** ou (opération- \sim) se dénote comme suit : $(\lambda, \mu)^\sim = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$. Par exemple, si $\lambda = 641$ et $\mu = 4221$, alors leurs parts disposées en ordre décroissant donnent 6442211. On obtient donc $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = (6421, 421)$. On peut observer

leur diagramme à l'aide de la figure 3.27.

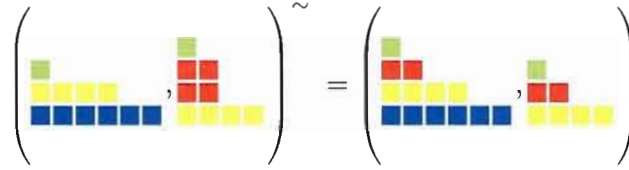


Figure 3.27 $(641, 4221)^\sim = (6421, 421)$.

Il faut prendre note qu'on peut effectuer cette opération lorsqu'il y a un seul partage. Il suffit d'utiliser le partage vide pour l'autre partage. Par exemple, $(64111, 0)^\sim = (611, 41)$.

Le théorème suivant a d'abord été conjecturé par Fomin, Fulton, Li et Poon dans l'article [6], mais a été prouvé par Lam, Postnikov et Pylyavskyy dans l'article [12].

Théorème 3.4.1 (*Lam, Postnikov et Pylyavskyy [12]*)

Pour tout partage λ et μ , si $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = (\lambda, \mu)^\sim$, alors

$$s_{\tilde{\lambda}} s_{\tilde{\mu}} - s_{\lambda} s_{\mu}$$

est Schur-positif.

On ne fera pas la preuve ici et on conseille l'article précédent pour la retrouver. Par contre, on en voit un exemple à l'aide des partages $(22, 11)^\sim = (21, 21)$. On peut observer les diagrammes correspondant aux produits de $s_{21}s_{21}$ et de $s_{22}s_{11}$ à la figure 3.28, d'où on remarque la Schur positivité.

Une autre conjecture a été énoncée par Fomin, Fulton, Li et Poon dans l'article [6]. Elle est détaillée plus loin, mais il faut d'abord discuter d'une autre opération qui s'effectue sur les partages. Cette opération a tout d'abord été définie par ces même auteurs pour être ensuite calculée en tant que formule récursive par Bergeron, Biagioli et Rosas dans l'article [2].

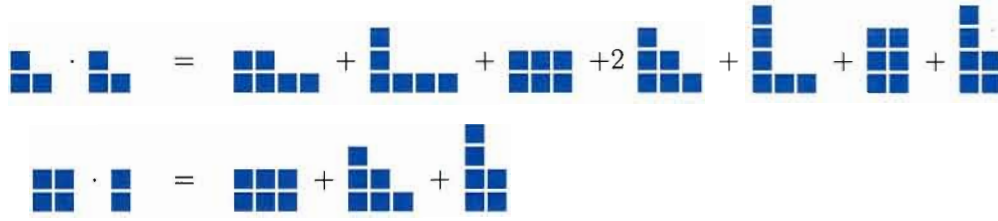


Figure 3.28 $s_{21}s_{21} - s_{22}s_{11}$ schur-positif.

Soit $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ et $\mu = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$ deux partages à n parts pouvant comprendre des parts égales à 0. À partir de ceux-ci, on construit deux autres partages $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ et $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ tel que

$$\begin{aligned}\alpha_i &:= \lambda_i - i + \#\{j \mid 1 \leq j \leq n, \mu_j - j \geq \lambda_i - i\} \\ \beta_j &:= \mu_j - j + 1 + \#\{i \mid 1 \leq i \leq n, \lambda_i - i > \mu_j - j\}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Ainsi construit, on dit que $(\lambda, \mu)^* = (\alpha, \beta)$ et on appelle l'opération-*. Pour mieux comprendre, soit $\lambda = 54221$ et $\mu = 63322$ deux partages à 5 parts. On obtient alors

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 5 - 1 + \#\{1\} = 5 & \beta_1 &= 6 - 1 + 1 + \#\{\} = 6 \\ \alpha_2 &= 4 - 2 + \#\{1\} = 3 & \beta_2 &= 3 - 2 + 1 + \#\{1, 2\} = 4 \\ \alpha_3 &= 2 - 3 + \#\{1, 2, 3\} = 2 & \beta_3 &= 3 - 3 + 1 + \#\{1, 2\} = 3 \\ \alpha_4 &= 2 - 4 + \#\{1, 2, 3, 4\} = 2 & \beta_4 &= 2 - 4 + 1 + \#\{1, 2, 3\} = 2 \\ \alpha_5 &= 1 - 5 + \#\{1, 2, 3, 4, 5\} = 1 & \beta_5 &= 2 - 5 + 1 + \#\{1, 2, 3, 4\} = 2 \\ \alpha &= 53221 & \beta &= 64322.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Il n'est pas évident de comprendre pourquoi on arrive à $|\lambda| + |\mu| = |\alpha| + |\beta|$, mais l'exemple aide à observer le fait que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n & (-i + \#\{j \mid 1 \leq j \leq n, \mu_j - j \geq \lambda_i - i\}) \\ & + (-j + 1 + \#\{i \mid 1 \leq i \leq n, \lambda_i - i \geq \mu_j - j\}) = 0,\end{aligned}$$

d'où résulte l'égalité entre $|(54221, 63322)|$ et $|(53221, 64322)|$.

On écrit $\lambda = \overrightarrow{\alpha}^i$ lorsqu'on obtient λ en ajoutant une case à la $i^{\text{ième}}$ ligne de α . Semblablement, on a $\lambda = \alpha \uparrow_j$ lorsqu'on obtient λ en ajoutant une case à la $j^{\text{ième}}$ colonne de α . Dans l'exemple précédent, $\lambda = \overrightarrow{\alpha}^2$ et $\lambda = \alpha \uparrow_4$. La figure 3.29 l'illustre clairement.



Figure 3.29 $54221 \xrightarrow{2} 53221 = 53221 \uparrow_4$.

On peut maintenant écrire la proposition de formule de récurrence comme suit :

Proposition 3.4.2 (Bergeron, Biagioli et Rosas [2])

Pour tous partages ρ et μ , soit $\lambda = \overrightarrow{\rho}^i$ et $(\alpha, \beta) = (\rho, \mu)^*$, alors on a

$$(\lambda, \mu)^* = \begin{cases} (\alpha, \beta \uparrow_{\lambda_i}) & \text{s'il existe } j \text{ tel que } \mu_j - j = \rho_i - i \\ (\overrightarrow{\alpha}^i, \beta) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Semblablement, lorsque $\mu = \overrightarrow{\nu}^i$ et $(\alpha, \beta) = (\lambda, \nu)^*$, on a

$$(\lambda, \mu)^* = \begin{cases} (\alpha \uparrow_{\mu_i}, \beta) & \text{s'il existe } j \text{ tel que } \lambda_j - j = \mu_i - i \\ \left(\alpha, \overrightarrow{\beta}^i \right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Si l'on veut trouver $(\lambda, \mu)^* = (41, 21)^*$ à l'aide de cette récurrence, on part de $\rho = 0$ et $\mu = 0$, et on a donc $(0, 0)^* = (0, 0) = (\alpha, \beta)$. Par l'équation 3.16 on a $\lambda = \overrightarrow{\rho}^1 = 1$. Alors

$$\begin{aligned} (1, 0)^* &= \begin{cases} (0, 0 \uparrow_{\lambda_1}) & \text{s'il existe } j \text{ tel que } \mu_j - j = \rho_i - i = -1 \\ \left(\overrightarrow{0}^1, 0 \right) & \text{sinon} \end{cases} \\ &= (0, 1). \end{aligned}$$

En fait, puisque $\mu = 0$, alors $\mu_1 - 1 = 0 - 1 = -1$, et, puisque $\lambda = 1 = \overrightarrow{\rho}^1$, alors $\rho = 0$ et $\rho_1 - 1 = 0 - 1 = -1$. Ainsi on utilise la première condition et on obtient $(1, 0)^* = (0, 1)$.

On continue la récurrence sur ρ , jusqu'à ce que $\lambda = 4$ avec l'équation 3.16 et $\mu = 0$. On trouve $(2, 0)^* = (1, 1)$, $(3, 0)^* = (2, 1)$ et $(4, 0)^* = (3, 1)$. On prend ensuite avec la même équation $\lambda = \overset{\rightarrow 2}{\rho} = \overset{\rightarrow 2}{4} = 41$ et on obtient $(41, 0)^* = (3, 11)$.

On continue avec la seconde partie de la récurrence, c'est-à-dire avec l'équation 3.17. On prend $\mu = 1 = \overset{\rightarrow 1}{\nu}$ ce qui donne $\nu = 0$ et on obtient

$$\begin{aligned} (41, 1)^* &= \begin{cases} (3 \uparrow_{\mu_1}, 11) & \text{s'il existe } j \text{ tel que } \lambda_j - j = \mu_i - i = 0 \\ \left(3, \overset{\rightarrow 1}{11}\right) & \text{sinon} \end{cases} \\ &= (3, 21). \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\lambda_1 - 1 = 4 - 1 = -3 \neq 0$ et $\lambda_2 - 2 = 1 - 2 = -1 \neq 0$, on utilise alors le deuxième choix et on obtient $(41, 1)^* = (3, 21)$. On trouve semblablement $(41, 2)^* = (3, 31)$. Avec $i = 2$ on obtient $(41, 21)^* = (31, 31)$. En calculant avec la définition de opération-*, on trouve là aussi la même réponse :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 4 - 1 + \{\} = 3 & \beta_1 &= 2 - 1 + 1 + \{1\} = 3 \\ \alpha_1 &= 1 - 2 + \{1, 2\} = 1 & \beta_1 &= 1 - 2 + 1 + \{1\} = 1 \\ \alpha &= 31 & \beta &= 31. \end{aligned}$$

On remarque que la récurrence 3.16 (resp. 3.17) sert à trouver où l'on dispose les cases de λ (resp. μ) dans $(\lambda, \mu)^*$.

On énonce maintenant la conjecture comme suit :

Conjecture 3.4.3 (*Fomin, Fulton, Li et Poon [6]*)

Pour toute paire de partage (λ, μ) , si

$$(\lambda, \mu)^* = (\alpha, \beta),$$

alors la fonction symétrique

$$s_\alpha s_\beta - s_\lambda s_\mu$$

est Schur-positive.

On a vu que $(41, 2)^* = (3, 31)$, à l'aide de la figure 3.30, on remarque la Schur positivité de $s_3 s_{31} - s_{41} s_2$.

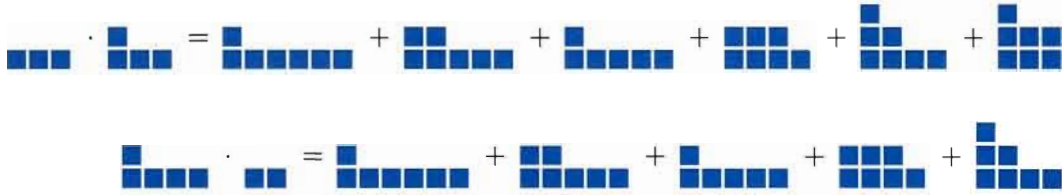


Figure 3.30 $s_3 s_{31} - s_{41} s_2$ schur-positif.

Plusieurs cas particuliers de cette conjecture 3.4.3 ont été démontrés dans l'article [2] écrit par Bergeron, Biagioli et Rosas. Entre autres, une proposition souligne que si la conjecture 3.4.3 est vraie pour (λ, μ) , alors elle est vraie pour (λ', μ') . Cette propriété consolide la remarque au sujet de l'involution énoncée précédemment : étant donné que l'involution d'un produit $s_\lambda s_\mu$ donne $s_{\lambda'} s_{\mu'}$ et que $c_{\lambda\mu}^\theta = c_{\lambda'\mu'}^{\theta'}$, alors $s_\mu s_\nu - s_\alpha s_\beta$ est s -positif si et seulement si $s_{\mu'} s_{\nu'} - s_{\alpha'} s_{\beta'}$ l'est.

On poursuit avec un autre cas particulier provenant du même article [2] qui dit que pour $\lambda = 0$ et pour tout partage μ on a $(\lambda, \mu)^* = (\alpha, \beta)$ tel que

$$\begin{aligned}\beta &= (\mu_1, \mu_2 - 1, \mu_3 - 2, \dots, \mu_k - k + 1), \\ \alpha' &= (\mu'_1 - 1, \mu'_2 - 2, \mu'_3 - 3, \dots, \mu'_k - k)\end{aligned}$$

où $k = \max \{i \mid \mu_i \geq i\}$. On rappelle que $\mu' = \mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_{|\mu|}$ est le conjugué de μ vu à la section 1.2.

Si l'on prend, par exemple, le partage $\mu = 665443321$, donc $\mu' = 987532$, on obtient alors $\beta = 6531$, $\alpha' = 8641$ et $\alpha = 43332211$. On peut le voir à la figure 3.31.

On peut observer que le partage μ est divisé en deux par la diagonale passant par $y = x + 1$. Les cases sous cette diagonale forme β en les poussant vers la gauche le long des lignes tandis que les cases au dessus de cette diagonale forment α en les glissant

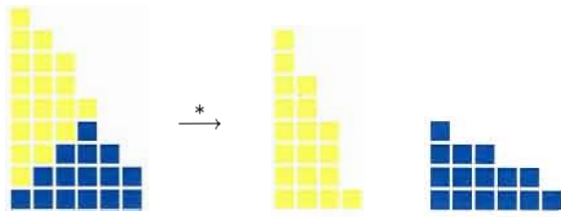


Figure 3.31 $(0, 665443321)^* = (43332211, 6531)$.

vers le bas le long des colonnes. Si $\lambda \neq 0$ on peut simplement ajouter les cases de λ aux diagrammes $(0, \mu)^*$ à l'aide de la récurrence 3.16. Par exemple, à la figure 3.32, on prend $\lambda = k$, $k \in \mathbb{N}$ et on l'ajoute à la figure 3.31.

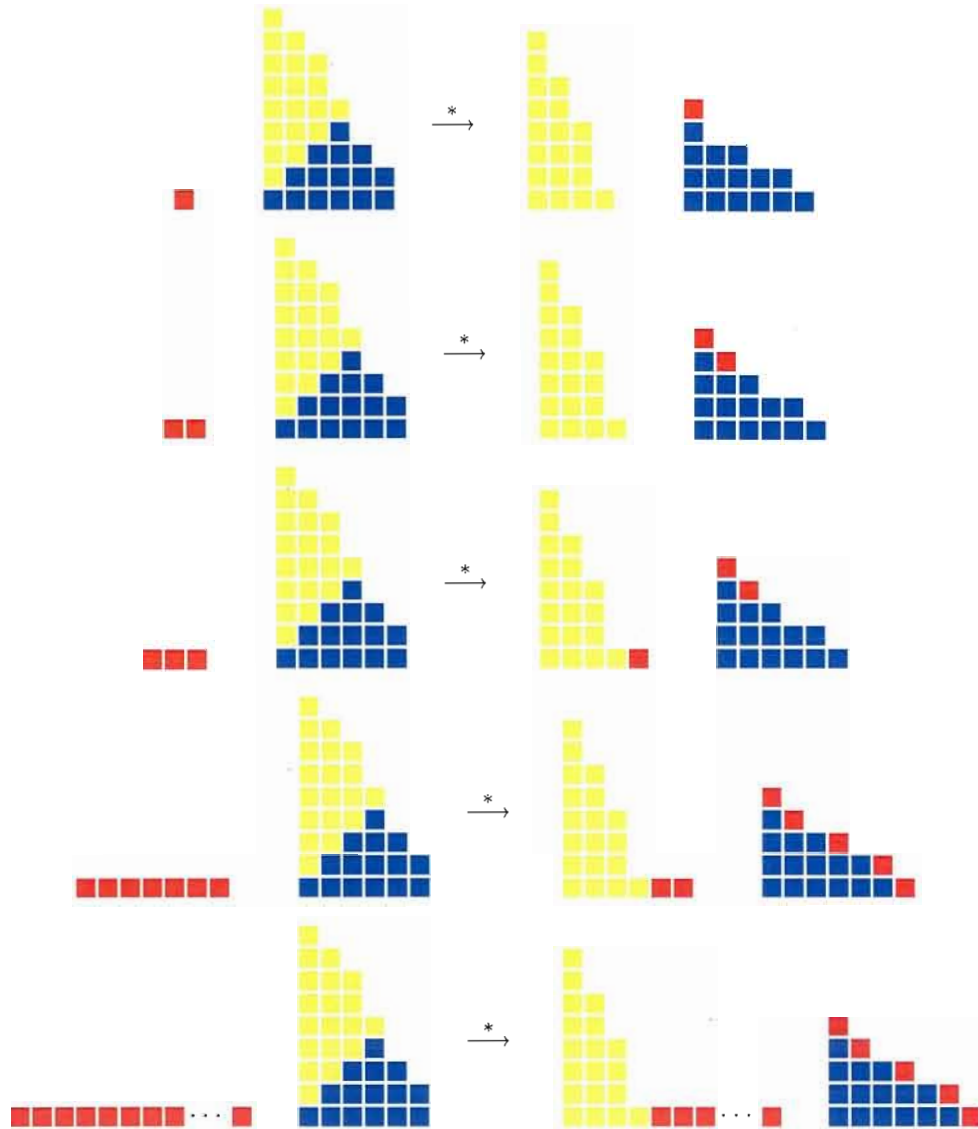


Figure 3.32 $(k, 665443321)^* = (43332211, 6531)$.

On remarque que les cases ajoutées à β sont celles qui étaient dans ligne λ aux positions $i = 1, 2, 4, 6$ et 7 . Les autres ont été ajoutées à la fin de α_1 . Ceci est dû au fait qu'au

partage μ on a $\mu_i - i$ qui est égal à $-8, -6, -4, -3, -1, 0, 2, 4$ et 5 , ainsi que

$$\rho_i - i = \begin{cases} -1 & \text{lorsque } i = 1 \\ 0 & \text{lorsque } i = 2 \\ 2 & \text{lorsque } i = 4 \\ 4 & \text{lorsque } i = 6 \\ 5 & \text{lorsque } i = 7. \end{cases}$$

On peut aussi remarquer qu'à partir de $i \geq \mu_1 + 2$, les $k - i + 1$ dernières cases de λ s'ajoutent automatiquement à α_1 si $k \geq \mu_1 + 2$.

Deux autres cas particuliers ont été démontrés dans l'article [2], soit pour des paires de partages en forme d'équerre et pour des paires de partages de forme rectangle à deux lignes et de forme rectangle à deux colonnes.

Différence de fonctions de Schur gauches Schur-positive

On sait que le produit de fonctions de Schur est égal à une fonction de Schur gauche. Il est donc normal de vouloir étendre les résultats précédents aux fonctions de Schur gauches. En ce sens, on peut déduire des équations 3.5 et 3.6 un résultat semblable à l'équation 3.12 tel que

$$s_{\alpha/\beta} \leq s_{\mu/\nu} \text{ si et seulement si pour tout } \lambda \text{ on a } \langle s_{\alpha/\beta}, s_\lambda \rangle \leq \langle s_{\mu/\nu}, s_\lambda \rangle$$

$$(\text{c'est-à-dire } c_{\beta\lambda}^\alpha \leq c_{\nu\lambda}^\mu),$$

qui est une condition de Schur positivité. Par involution, semblablement au produit de Schur, on a $s_{\mu/\nu} - s_{\alpha/\beta}$ Schur positif si et seulement si $s_{(\mu/\nu)'} - s_{(\alpha/\beta)'}$ l'est.

On retrouve aussi dans le livre de Macdonald [14] une proposition utilisant les notions d'empilement et de recollement de diagrammes vues à la figure 1.23. Cette proposition s'énonce ainsi :

Proposition 3.4.4 (*Macdonald [14](p.88)*)

Si λ/μ et α/β sont deux partages gauches, alors

$$s_{\lambda/\mu}s_{\alpha/\beta} = s_{\lambda/\mu \oplus \alpha/\beta} + s_{\lambda/\mu \odot \alpha/\beta}, \quad (3.18)$$

où $\lambda/\mu \oplus \alpha/\beta$ est l'empilement des diagrammes de forme λ/μ et α/β , et où $\lambda/\mu \odot \alpha/\beta$ est le recollement des diagrammes.

Preuve En fait, il y a une bijection entre les remplissages des tableaux λ/μ et α/β , et l'ensemble des remplissages des tableaux $\lambda/\mu \oplus \alpha/\beta$ et $\lambda/\mu \odot \alpha/\beta$. Pour comprendre cette bijection, il suffit d'observer la valeur j de la case la plus au sud-est des tableaux gauches semi-standards de forme λ/μ et la valeur k de la case la plus au nord-ouest des tableaux gauches semi-standards de forme α/β . Lorsque $j > k$, on fait un empilement des deux tableaux. Si $j \leq k$, alors on fait un recollement des deux tableaux. On peut le voir à l'aide de la figure 3.33. Ainsi construit, on obtient bien l'équation de la proposition précédente. \square

Ainsi, $s_{\lambda/\mu}s_{\alpha/\beta} - s_{\lambda/\mu \oplus \alpha/\beta}$ et $s_{\lambda/\mu}s_{\alpha/\beta} - s_{\lambda/\mu \odot \alpha/\beta}$ sont des différences Schur positives. Il est intéressant de remarquer ici, qu'en utilisant plus d'une fois cette formule, on peut trouver plusieurs différences Schur-positives. Par exemple, la figure 3.34 représente les diagrammes indexés aux fonctions de Schur gauches $(s_3s_2)s_1$ où l'on applique deux fois la proposition de Macdonald. Il est intéressant d'observer que s_3s_2 est égal aux fonctions de Schur gauches ayant les partages 3 et 2 comme composante connexe, c'est-à-dire $s_{52/2}, s_{53/3}, \dots$. Ainsi, on obtient par exemple que $s_{52/2}s_1 - s_{53/2}$ est s-positif, ou encore que $s_{41/1}s_2 - s_{443/32}$ est une différence Schur-positive ($s_3s_1 = s_{41/1}$).

De plus, le **support** d'une fonction de Schur gauche $s_{\theta/\mu}$ correspond à l'ensemble des partages λ tel que $c_{\lambda\mu}^\theta > 0$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \text{supp}(s_{42/2}) &= \{4, 31, 22\} \text{ et} \\ \text{supp}(s_{41/1}) &= \{4, 31\}. \end{aligned}$$

On obtient alors l'inclusion $\text{supp}(s_{41/1}) \subseteq \text{supp}(s_{42/2})$. À l'aide des formule de Pieri, on sait que $s_{42/2}$ et $s_{41/1}$ sont de multiplicité simple, ainsi, $s_{42/2} - s_{41/1}$ est Schur positif.

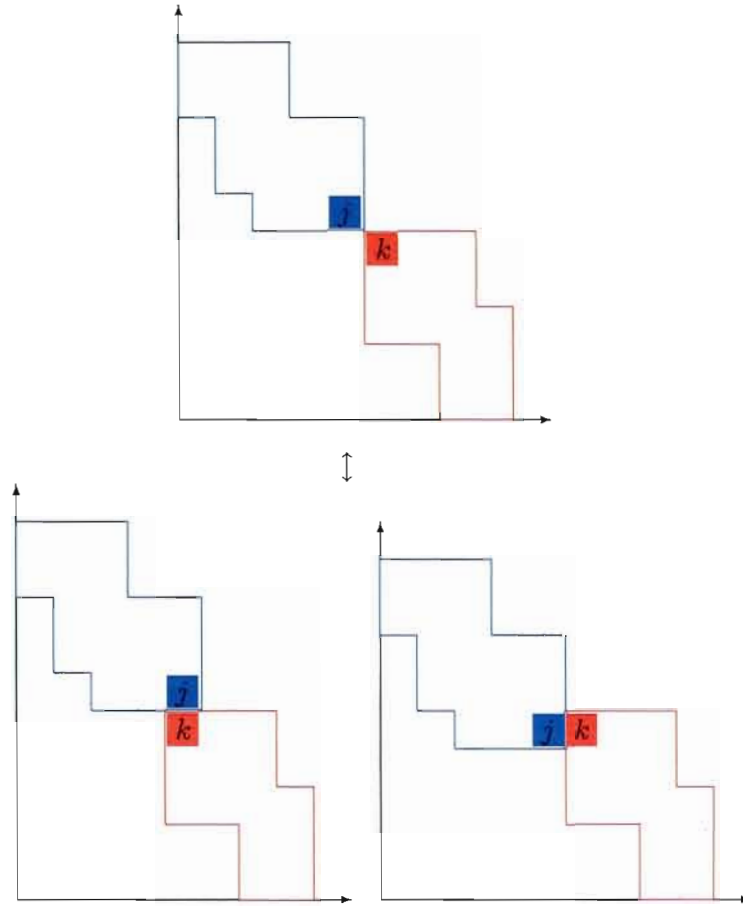


Figure 3.33 Bijection avec empilement si $j > k$ et recollement si $j \leq k$.

Tout comme le produit de fonctions de Schur, si deux fonctions de Schur gauches sont de multiplicités simples et qu'il y a une inclusion entre les supports, alors leur différence est Schur-positive.

D'autre part, la conjecture de Fomin, Fulton, Li et Poon de l'article [6], prouvée dans [12] par Lam, Postnikov et Pylyavskyy, est étendue au produit de fonctions de Schur gauches dans l'article [4]. On doit d'abord définir ce que fait l'opération tilde avec les partages gauches. Soit $(\lambda/\mu, \tau/\nu)$ un partage gauche : l'opération tilde $(\lambda/\mu, \tau/\nu)^\sim = (\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}, \tilde{\tau}/\tilde{\nu})$ s'effectue en séparant les « numérateurs » et les « dénominateurs » des partages, c'est-à-dire $(\lambda, \tau) = (\tilde{\lambda}, \tilde{\tau})$ et $(\mu, \nu) = (\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$. Par exemple, $(521/31, 43/22)^\sim = (531/32, 42/21)$, voir la figure 3.35. Si μ ou ν est égale à 0, alors on effectue l'opération tilde de la même façon. Par exemple, $(521/311, 43)^\sim = (531/31, 42/1)$. On peut voir graphiquement cet

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \blacksquare \blacksquare \blacksquare \end{array} \right) \cdot \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} &= \left(\begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare + \begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare \end{array} & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \end{array} \right) \\
 &= \begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \end{array} + \begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \end{array} + \begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \end{array} + \begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \cdot \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \end{array}
 \end{aligned}$$

Figure 3.34 $s_3 s_2 s_1$

exemple à la figure 3.36.

$$\left(\begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array}, \begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array} \right)^{\sim} = \left(\begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array}, \begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array} \right)$$

Figure 3.35 $(521/31, 43/22)^{\sim} = (531/32, 42/21)$.

$$\left(\begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array}, \begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \end{array} \right)^{\sim} = \left(\begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array}, \begin{array}{cc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \end{array} \right)$$

Figure 3.36 $(521/311, 43)^{\sim} = (531/31, 42/1)$.

Dans l'article [4], il est démontré que l'opération tilde préserve les paires λ/μ et τ/ν de bandes horizontales, de bandes verticales, de pseudo-rubans et d'équerres gauches (c'est-à-dire tel que λ , μ , τ et ν sont tous des partages non vide en forme d'équerres).

L'extension aux fonctions de Schur gauches de la conjecture de Fomin, Fulton, Li et Poon [6] faite par de Bergeron et Mcnamara [4] s'énonce ainsi.

Conjecture 3.4.5 (*Bergeron et Mcnamara [4]*)

Pour tout λ/μ et τ/ν , si $(\lambda/\mu, \tau/\nu)^{\sim} = (\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}, \tilde{\tau}/\tilde{\nu})$, alors

$$s_{\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}} s_{\tilde{\tau}/\tilde{\nu}} - s_{\lambda/\mu} s_{\tau/\nu}$$

est Schur-positif.

Par exemple, les partages $(42/21, 331/22)^\sim = (431/22, 32/21)$ indexés aux fonctions de Schur comme dans la conjecture précédente est s-positif car

$$s_{42/21}s_{331/22} = s_{51} + 2s_{42} + 3s_{411} + s_{33} + 4s_{321} + 3s_{3111} + s_{222} + 2s_{2211} + s_{21111} \text{ et}$$

$$s_{431/22}s_{32/21} = s_{51} + 3s_{42} + 3s_{411} + 2s_{33} + 6s_{321} + 3s_{3111} + 2s_{222} + 3s_{2211} + s_{21111},$$

et ainsi,

$$s_{431/22}s_{32/21} - s_{42/21}s_{331/22} = 42 + s_{33} + 2s_{321} + s_{222} + s_{2211}.$$

La conjecture 3.4.5 a été démontrée dans ce même article pour des cas particuliers tels que pour les paires de bandes horizontales, de bandes verticales et d'équerres gauches.

Semblablement à l'opération tilde, l'opération-* est étendue aux fonctions de Schur gauches. Plus précisément, on fait agir l'opération-* sur les partages au numérateur et sur les partages au dénominateur en posant

$$(\lambda/\mu, \tau/\nu)^* = (\lambda, \tau)^* / (\mu, \nu)^*.$$

Ainsi, une autre proposition de l'article [2] dit que l'opération-* préserve les familles de paires de diagrammes ayant la forme (voir la section 1.2) d'équerres, de rectangles à n -lignes, de bandes horizontales et de pseudo-rubans.

La conjecture 3.4.3 a été étendue aux fonctions de Schur gauches par Bergeron, Biagioli et Rosas dans [2] et s'énonce comme suit :

Conjecture 3.4.6 (*Bergeron, Biagioli et Rosas [2]*)

Pour tout λ/μ et τ/ν , si $(\lambda/\mu, \tau/\nu)^* = (\alpha, \beta)$, alors la différence

$$s_\alpha s_\beta - s_{\lambda/\mu} s_{\tau/\nu}$$

est Schur-positive.

Si l'on prend par exemple, les partages $(42/21, 331/22)^* = (42, 331)^* / (21, 22)^*$. On rappelle que pour $(\lambda, \tau)^* = (\alpha, \beta)$, alors

$$\alpha_i := \lambda_i - i + \#\{j \mid \tau_j - j \geq \lambda_i - i\}$$

$$\beta_j := \beta_j - j + 1 + \#\{i \mid \lambda_i - i > \tau_j - j\}$$

On obtient ainsi que $(42, 331)^* = (32, 431)$ et $(21, 22)^* = (21, 22)$, alors $(42/21, 331/22)^* = (32/21, 431/22)$. On remarque ici que $(42/21, 331/22)^* = (42/21, 331/22)^\sim$, mais ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, $s_{32/21}s_{431/22} - s_{42/21}s_{331/22}$ est une différence positive de fonctions de Schur gauche.

Des cas particuliers ont été prouvés dans l'article de Bergeron, Biagioli et Rosas. Ainsi, la conjecture est vraie pour les paires de partages gauches $(\lambda/\mu, \tau/\nu)$ où les partages ont tous une forme d'équerre et où $\mu = \nu$. Enfin, la conjecture est également vraie pour les paires de partages $(0, \tau/\nu)$ où τ/ν est un pseudo-ruban.

Les méthodes servant à obtenir des différences positives de produits fonctions de Schur gauches vu précédemment ont été vu dans l'intention de pouvoir construire les arêtes des ensembles partiellement ordonnés par la Schur-positivité. Étant donné qu'il y a une infinité de partage gauche de n , on a vu à la section 3.1.1 qu'il y a un nombre fini de classe d'égalité entre fonction de Schur. Il suffit ainsi de prendre une fonction de Schur gauche dans chacune de ces classes afin de construire l'ensemble partiellement ordonné par les différences s-positives.

3.5 m -positivité

Dans un même ordre d'idée que la section précédente, une différence dite **m -positive** est une différence de produits de fonctions symétriques dont le résultat est positif en termes de fonctions monomiales. On doit cependant remarquer que si une différence est dite m -positive, il est incorrect de dire qu'elle est s-positive. Par exemple :

$$\begin{aligned} m_{31}m_{22} - m_{33}m_2 &= m_{521} + m_{332} + m_{3221} \\ &= s_{521} - 2s_{5111} - s_{431} - s_{422} + s_{4211} + 2s_{41111} + 2s_{332} - s_{3221} \\ &\quad - s_{32111} - s_{311111} + s_{2222} + 2s_{221111} - 2s_{2111111} + 3s_{11111111} \end{aligned}$$

Par contre, l'inverse est vrai. On rappelle que $s_\lambda = \sum_{\mu \vdash |\lambda|} K_{\lambda\mu} m_\mu$ où les coefficients $K_{\lambda\mu}$ sont appelés les nombres de Kostka. Ces nombres ont la particularité d'être des entiers positifs. Donc, si une différence de produits de fonctions symétriques est s-positive, alors

on peut dire qu'elle est m -positive. Par exemple,

$$\begin{aligned}
s_{32}s_{21} - s_{31}s_{22} &= m_{44} + 2m_{431} + 2m_{422} + 3m_{4211} + 4m_{41111} + 3m_{332} + 7m_{3311} \\
&\quad + 8m_{3221} + 15m_{32111} + 25m_{311111} + 12m_{2222} + 22m_{22211} \\
&\quad + 41m_{221111} + 75m_{2111111} + 140m_{11111111} \\
&= s_{44} + s_{431} + s_{3311}
\end{aligned}$$

En introduction, il a été dit que l'on cherche à faire le point (en partie) sur les inégalités entre coefficients de Littlewood-Richardson. Cette section apporte un autre regard sur ces inégalités puisque :

$$\begin{aligned}
s_\lambda s_\mu &= \sum_{\theta} c_{\lambda\mu}^{\theta} s_{\theta} \\
&= \sum_{\theta} c_{\lambda\mu}^{\theta} \left(\sum_{\rho} K_{\theta\rho} m_{\rho} \right) \\
&= \sum_{\rho} \left(\sum_{\theta} c_{\lambda\mu}^{\theta} K_{\theta\rho} \right) m_{\rho}.
\end{aligned}$$

On cherche donc les différences m -positives, c'est-à-dire :

$$s_\lambda s_\mu - s_\alpha s_\beta = \sum_{\rho} \left(\sum_{\theta} c_{\lambda\mu}^{\theta} K_{\theta\rho} \right) m_{\rho} - \sum_{\rho} \left(\sum_{\theta} c_{\alpha\beta}^{\theta} K_{\theta\rho} \right) m_{\rho},$$

tel que

$$\left(\sum_{\theta} c_{\lambda\mu}^{\theta} K_{\theta\rho} \right) - \left(\sum_{\theta} c_{\alpha\beta}^{\theta} K_{\theta\rho} \right) \geq 0.$$

Semblablement, pour les fonctions de Schur gauches, on cherche

$$s_{\lambda/\mu} - s_{\alpha/\beta} = \sum_{\rho} \left(\sum_{\theta} c_{\theta\mu}^{\lambda} K_{\theta\rho} \right) m_{\rho} - \sum_{\rho} \left(\sum_{\theta} c_{\theta\beta}^{\alpha} K_{\theta\rho} \right) m_{\rho},$$

tel que

$$\left(\sum_{\theta} c_{\theta\mu}^{\lambda} K_{\theta\rho} \right) - \left(\sum_{\theta} c_{\theta\beta}^{\alpha} K_{\theta\rho} \right) \geq 0.$$

En s'intéressant aux nombres de Kostka, on peut donc approfondir notre connaissance des coefficients de Littlewood-Richardson. On a vu à l'équation 3.18 qu'on a $s_{\alpha/\beta} \leq s_{\mu/\nu}$

si et seulement si pour tout λ , $\langle s_{\alpha/\beta}, s_\lambda \rangle \leq \langle s_{\mu/\nu}, s_\lambda \rangle$, ce qui implique $s_{\mu/\nu} - s_{\alpha/\beta}$ est une différence Schur positive. Semblablement, $s_{\mu/\nu} - s_{\alpha/\beta}$ est m-positif à la condition que

$$s_{\alpha/\beta} \leq s_{\mu/\nu} \text{ si et seulement si pour tout } \lambda, \langle s_{\alpha/\beta}, h_\lambda \rangle \leq \langle s_{\mu/\nu}, h_\lambda \rangle.$$

En fait, les nombres de Kostka $K_{\lambda\mu}$ sont égaux à $\langle s_\lambda, h_\mu \rangle$. Ceci est dû au fait que les bases homogènes et monomiales sont des bases duales, c'est-à-dire tel que

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, puisque $s_\lambda = \sum_\nu K_{\lambda\nu} m_\nu$, alors

$$\begin{aligned} \langle s_\lambda, h_\mu \rangle &= \sum_\nu K_{\lambda\nu} \langle m_\nu, h_\mu \rangle \\ &= K_{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Étant donné l'attention qu'on peut porter sur l'étude des nombres de Kostka, il peut être intéressant d'inscrire certains résultats au sujet de la base des fonctions élémentaires. En fait, on peut écrire cette base en termes de fonctions de Schur comme suit :

$$e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} s_\lambda.$$

En multipliant cette fonction par s_θ on devrait voir apparaître les coefficients de Littlewood-Richardson. Dans le livre de Stanley [20](p.337), on trouve l'équation suivante :

$$s_\theta e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\theta', \mu} s_\lambda.$$

On peut en déduire que certains produits entre les nombres de Kostka et les coefficients de Littlewood-Richardson donnent un nombre de Kostka. On n'entre pas plus dans les détails de ces équations. Le but de les introduire ici est simplement d'amener une ouverture sur le sujet de l'étude des coefficients de Littlewood-Richardson via les nombres de Kostka.

3.6 Résumé : cas spéciaux

Formule de Pieri et celles qui en découlent (équations 3.7, 3.8, 3.10 et 3.11) :

multiplicité simple, p entier, $\mu \vdash k$, $\mu \subseteq \lambda$

$$\begin{aligned} s_\mu s_p &= \sum_{\lambda \vdash (p+|\mu|)} s_\lambda \quad \text{et} \quad s_{\lambda/p} = \sum_{\lambda \vdash (p+|\mu|)} s_\lambda, \quad \text{où } \lambda/\mu \text{ bande horizontale,} \\ s_\mu s_{1^p} &= \sum_{\lambda \vdash (p+|\mu|)} s_\lambda \quad \text{et} \quad s_{\lambda/1^p} = \sum_{\lambda \vdash (p+|\mu|)} s_\lambda, \quad \text{où } \lambda/\mu \text{ bande verticale.} \end{aligned}$$

Théorème de Stembridge (théorème 3.3.1) Le produit de $s_\lambda s_\mu$ est de multiplicité simple si et seulement si

1. μ ou λ est un rectangle d'une ligne ou d'une colonne, ou
2. μ est un rectangle à deux lignes et λ est une équerre épaisse (ou vice versa), ou
3. μ est un rectangle et λ est un presque rectangle (ou vice-versa), ou
4. μ et λ sont des rectangles.

Remarque Si $s_{\alpha/\beta}$ et $s_{\lambda/\mu}$ de multiplicité simple et $\text{supp}(s_{\alpha/\beta}) \subseteq \text{supp}(s_{\lambda/\mu})$, alors $s_{\lambda/\mu} - s_{\alpha/\beta}$ s-positif.

Par involution

$$c_{\lambda\mu}^\theta = c_{\lambda'\mu'}^{\theta'} \quad (\text{équation 3.9})$$

$$s_\mu s_\nu - s_\alpha s_\beta \quad \text{s-positif} \iff s_{\mu'} s_{\nu'} - s_{\alpha'} s_{\beta'} \quad \text{s-positif.}$$

Équation de Kirillov (équation 3.13)

$$s_m^k s_m^k = s_{(m+1)^k} s_{(m-1)^k} + s_{m^{k+1}} s_{m^{k-1}}.$$

Équation de Lam, Postnikov et Pylyavskyy (théorème 3.4.1)

$$s_{\tilde{\lambda}} s_{\tilde{\mu}} - s_\lambda s_\mu \quad \text{s-positif.}$$

Équation de Fomin, Fulton, Li et Poon (conjecture 3.4.3)

$$s_\alpha s_\beta - s_\lambda s_\mu \quad \text{s-positif si } (\lambda, \mu)^* = (\alpha, \beta).$$

Équation de Macdonald (proposition 3.4.4)

$$s_{\lambda/\mu} s_{\alpha/\beta} = s_{\lambda/\mu \cdot \alpha/\beta} + s_{\lambda/\mu \odot \alpha/\beta}.$$

Équation de Bergeron et McNamara (conjecture 3.4.5)

$$s_{\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}} s_{\tilde{\tau}/\tilde{\nu}} - s_{\lambda/\mu} s_{\tau/\nu} \text{ s-positif.}$$

Équation de Bergeron, Biagioli et Rosas (conjecture 3.4.6)

$$s_{\alpha} s_{\beta} - s_{\lambda/\mu} s_{\tau/\nu} \text{ s-positif si } (\lambda/\mu, \tau/\nu)^* = (\alpha, \beta).$$

CHAPITRE IV

ORDRES PARTIELS SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET POSITIVITÉ

Comme dit à l'introduction, le coeur de ce travail consiste à étudier l'ordre partiel

$$s_{\alpha/\beta} \leq s_{\lambda/\mu} \text{ si et seulement si } s_{\lambda/\mu} - s_{\alpha/\beta} \text{ est Schur positif,}$$

sur l'ensemble des fonctions de Schur gauche indexées par des diagrammes ayant n cases. Dans ce chapitre, on munit cet ensemble de fonctions d'une structure de poset. On survole aussi des variantes tels que l'ensemble des fonctions de Schur gauche de ordonné par h -positivité et m -positivité. Bien entendu, on ne fait ici qu'établir les grandes lignes d'une étude qui reste à faire.

4.1 Poset associé à la h -positivité

Pour s'habituer aux questions étudiées plus loin, on considère le cas simple suivant. Il faut avant tout rappeler que les fonctions symétriques homogènes se définissent comme suit pour $p \in \mathbb{N}$:

$$h_p := \sum_{\alpha \vdash p} \mathbf{x}^\alpha.$$

Comme on l'a vu à la section 2.2, pour un partage $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$, la fonction homogène h_λ est égale à $h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_k}$. On a que $h_p = s_p$. En fait, puisque $s_p = \sum_{\tau} \mathbf{x}_\tau$, où \mathbf{x}_τ désigne le monôme associé au contenu du tableau τ , dans ce cas τ a la forme d'un rectangle à une ligne. À la figure 4.1 on peut voir un tel tableau. Puisque la longueur de

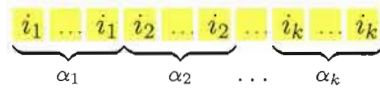


Figure 4.1 Tableau rectangle à une ligne.

ce rectangle est p , alors le monôme associé au contenu de ce tableau est $x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}$, tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = p$. Ainsi, $s_p = \sum_{\alpha \vdash p} \mathbf{x}^\alpha = h_p$. On a alors aussi que $h_\lambda = s_{\lambda_1} s_{\lambda_2} \dots s_{\lambda_k}$. De plus, $h_\lambda - h_\mu$ est Schur positif si et seulement si les partages sont tels que $\lambda \preceq \mu$. On rappelle que $\lambda \preceq \mu$ est l'ordre de la dominance (vu à la section 1.3) entre deux partages : on a $\mu \preceq \lambda$ si

$$\begin{aligned} \mu_1 &\leq \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 &\leq \lambda_1 + \lambda_2 \\ &\dots \\ \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k &\leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k. \end{aligned}$$

Cette affirmation est prouvé dans Macdonald [14] (p.110). De ce résultat, on peut en conclure que $s_{\lambda_1} s_{\lambda_2} \dots s_{\lambda_k} - s_{\mu_1} s_{\mu_2} \dots s_{\mu_q}$ est s-positif si et seulement si $\lambda \preceq \mu$. Semblablement, par involution on a $s_{1^{\lambda_1}} s_{1^{\lambda_2}} \dots s_{1^{\lambda_k}} - s_{1^{\mu_1}} s_{1^{\mu_2}} \dots s_{1^{\mu_q}}$ est s-positif si et seulement si $\lambda \preceq \mu$. Pour voir un exemple de Schur positivité des fonctions homogènes,

on prend les fonctions homogènes indexées par les partages de 6.

$$\begin{aligned}
h_{111111} &= s_1^6 = s_6 + 5 s_{51} + 9 s_{42} + 10 s_{411} + 5 s_{33} + 16 s_{321} + 10 s_{3111} + 5 s_{222} \\
&\quad + 9 s_{2211} + 5 s_{21111} + s_{111111} \\
h_{21111} &= s_2 s_1^4 = s_6 + 4 s_{51} + 6 s_{42} + 6 s_{411} + 3 s_{33} + 8 s_{321} + 4 s_{3111} + 2 s_{222} \\
&\quad + 3 s_{2211} + s_{21111} \\
h_{2211} &= s_2^2 s_1^2 = s_6 + 3 s_{51} + 4 s_{42} + 3 s_{411} + 2 s_{33} + 4 s_{321} + s_{3111} + s_{222} + s_{2211} \\
h_{222} &= s_2^3 = s_6 + 2 s_{51} + 3 s_{42} + s_{411} + s_{33} + 2 s_{321} + s_{222} \\
h_{3111} &= s_3 s_1^3 = s_6 + 3 s_{51} + 3 s_{42} + 3 s_{411} + s_{33} + 2 s_{321} + s_{3111} \\
h_{321} &= s_3 s_2 s_1 = s_6 + 2 s_{51} + 2 s_{42} + s_{411} + s_{33} + s_{321} \\
h_{33} &= s_3^2 = s_6 + s_{51} + s_{42} + s_{33} \\
h_{411} &= s_4 s_1^2 = s_6 + 2 s_{51} + s_{42} + s_{411} \\
h_{42} &= s_4 s_2 = s_6 + s_{51} + s_{42} \\
h_{51} &= s_5 s_1 = s_6 + s_{51} \\
h_6 &= s_6.
\end{aligned}$$

Le poset des fonctions symétriques homogènes indexées par les partages de 6 et ordonnées par Schur positivité est représentée à la figure 4.2.

On remarque que le poset d'ordre de dominance des partages de 6 (représenté à la figure 1.30) est inversé par rapport aux partages indexés à h_λ . En fait, l'ensemble partiellement ordonné par les différences Schur positives des fonctions symétriques homogènes peut se construire à l'aide de l'ordre de la dominance inversée. Il est donc relativement facile d'ordonner les fonctions symétriques homogènes selon leurs différences Schur positives. Les posets des fonctions de Schur, étudiés à la prochaine section, en témoignent.

4.2 Poset associé à la s-positivité

Dans cette section, quelques exemples d'ensembles partiellement ordonnés de fonctions de Schur sont représentés. À cet effet, la section 3.4 traitant des Schur positives aide

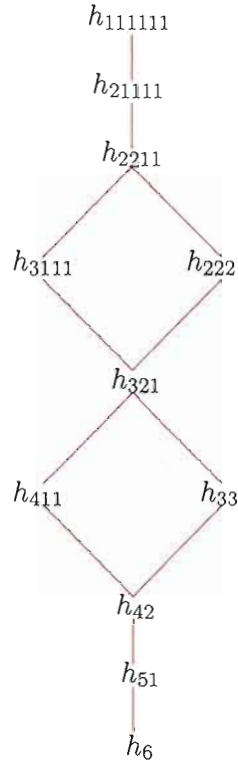


Figure 4.2 Poset des fonctions homogènes indexées par des partages de 6.

grandement à la construction de ces posets. En ce sens, les arêtes signifient que la fonction de niveau inférieur soustraite à celle du niveau supérieur est une différence Schur positive. À l'intention d'une meilleure compréhension, les sommets du poset sont représentés par un produit de fonctions (ou une fonction) de Schur ainsi que les diagrammes (ou le diagramme) indexés correspondants.

On doit avant tout commencer par montrer que la Schur positivité est bien un ordre partiel. En fait, étudier les différences positives de produits de fonctions de Schur $s_\lambda s_\mu - s_\alpha s_\beta$ revient à étudier les produits tel que $s_\alpha s_\beta \leq s_\lambda s_\mu$. On doit alors montrer que dans ce cas \leq est bien une relation d'ordre partiel. On a la propriété de réflexivité car $s_\lambda s_\mu - s_\lambda s_\mu = 0$ est Schur-positif, ainsi $s_\lambda s_\mu \leq s_\lambda s_\mu$. Pour la propriété d'antisymétrie, si on a que

$$s_\alpha s_\beta \leq s_\lambda s_\mu \text{ et}$$

$$s_\lambda s_\mu \leq s_\alpha s_\beta,$$

alors on a que $s_\lambda s_\mu - s_\alpha s_\beta$ et $s_\alpha s_\beta - s_\lambda s_\mu$ sont s -positives. La deuxième équation implique aussi que $s_\lambda s_\mu - s_\alpha s_\beta$ est égale à 0 ou égale à une addition de fonctions de Schur exclusivement négatives. Ainsi, la seule possibilité est que $s_\lambda s_\mu - s_\alpha s_\beta = 0$ ou encore $s_\lambda s_\mu = s_\alpha s_\beta$. Pour terminer, il reste à montrer la transitivité. On suppose qu'on a $s_\alpha s_\beta \leq s_\lambda s_\mu$ et $s_\rho s_\theta \leq s_\alpha s_\beta$, il faut alors montrer que $s_\rho s_\theta \leq s_\lambda s_\mu$. En fait,

$$s_\lambda s_\mu - s_\rho s_\theta = \underbrace{(s_\lambda s_\mu - s_\alpha s_\beta)}_{s\text{-positif}} + \underbrace{(s_\alpha s_\beta - s_\rho s_\theta)}_{s\text{-positif}},$$

donc on obtient bien que $s_\rho s_\theta \leq s_\lambda s_\mu$. On en conclut ainsi que la Schur-positivité est un ordre partiel. On considère le **poset** (\mathcal{S}_n, \leq) où

$$\mathcal{S}_n = \{s_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$$

avec l'ordre \leq .

Pour débiter avec les poset, il y a les fonctions de Schur des partages de 2. La figure 4.3 représente cet ensemble partiellement ordonné. On montre l'existence des arêtes de

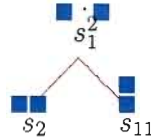


Figure 4.3 Poset des fonctions de Schur indexées des partages de 2.

ce poset à l'aide de la formule de Pieri et celles qui en découlent 3.7 et 3.8. Elles se vérifie aussi par l'équation de Kirillov 3.13, on souligne que $s_0 = 1$. En second vient naturellement le poset 4.4 des fonctions de Schur indexées par les partages de 3. Bien que ce poset soit plus complexe, on montre encore l'existence de ces arêtes à l'aide de la formule de Pieri et celles qui en découlent.

On peut remarquer que les posets 4.3 et 4.4 ont un «axe de symétrie». Par «axe de symétrie», on entend qu'en traçant un axe vertical passant par le produit de fonctions de Schur s_1^n , la disposition des arêtes est symétrique par rapport à l'axe. On remarque

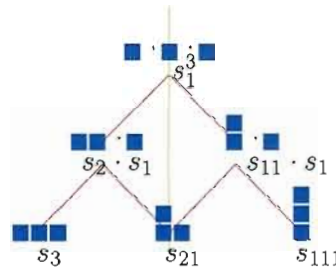


Figure 4.4 Poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 3.

que pour tous les niveaux, si on retrouve le produit $s_{\zeta_1} s_{\zeta_2} \dots s_{\zeta_p}$ où ζ_i est un partage, alors le produit indexé par les partages conjugués $s_{\zeta'_1} s_{\zeta'_2} \dots s_{\zeta'_p}$ se retrouve au même niveau, et, à la même position par rapport à l'axe. On observe que l'axe de symétrie passe par les produits de fonctions de Schur dont les diagrammes λ sont tel que le conjugué λ' est égal, c'est-à-dire $\lambda = \lambda'$. Par exemple, la droite verte coupant le poset 4.4 en deux est l'«axe de symétrie». Cette symétrie est due à un fait observé à la section 3.2, c'est-à-dire $s_\lambda s_\mu - s_\alpha s_\beta$ est Schur positif si et seulement si $s_{\lambda'} s_{\mu'} - s_{\alpha'} s_{\beta'}$ l'est. Ainsi, en justifiant les arêtes se trouvant à la gauche de l'axe, on explique aussi les arêtes se trouvant à droite et réciproquement.

Pour terminer cette section, on observe l'ensemble partiellement ordonné des fonctions de Schur indexées par des partages de 4 à la figure 4.5. On fait remarquer que l'axe de symétrie est encore là, mais on a décentré les produits $s_{11}s_2$ et s_{22} dans le poset pour mieux voir l'arête allant de $s_{21}s_1$ à s_{22} . Encore une fois, l'existence de plusieurs arêtes s'expliquent par la formule de Pieri. On considère que la formule de Pieri et les formules qui en découlent peuvent parfois être utilisées à la suite d'une mise en évidence dans les produits. Par exemple, $s_2 s_1^2 - s_2^2 = s_2 (s_1^1 - s_2)$ est Schur positif puisque $s_1^1 - s_2$ l'est par la formule de Pieri. De plus, l'existence de certaines arêtes peuvent se justifier par récurrence. En fait, on retrouve dans le poset des fonctions de Schur indexées par les partages de $n+1$, le poset des fonctions indexées par les partages de n , où les fonctions sont multipliées par s_1 . Les arêtes bleues de la figure 4.5 ainsi que les différences $s_2 s_1^2 - s_3 s_1$ et $s_{11} s_1^2 - s_{111} s_1$ mettent en évidence cette récurrence.

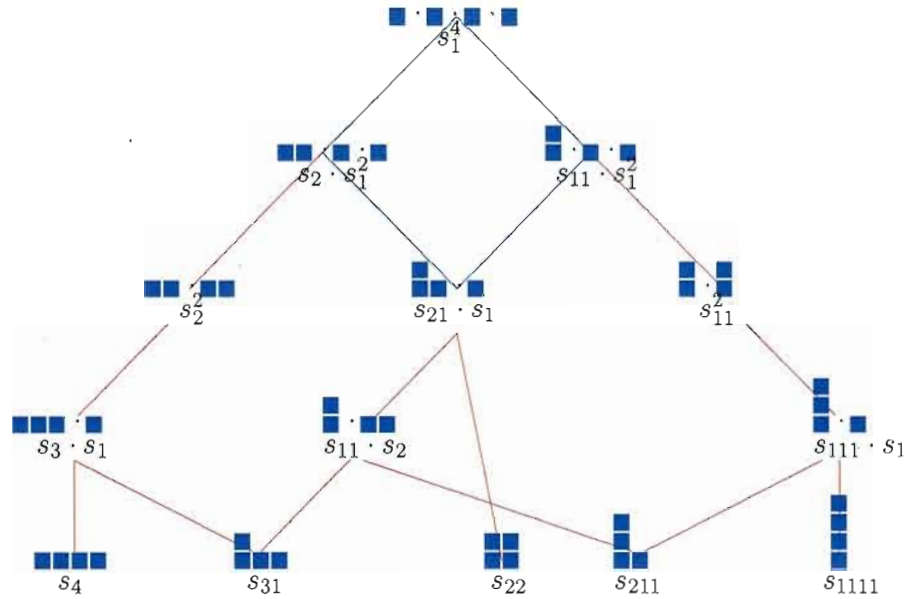


Figure 4.5 Poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 4.

De plus, il est possible de justifier l'existence de certaines arêtes par récurrence dans le cas où la fonction de Schur multipliée à chacun des sommets n'est pas s_1 , mais s_λ . Ainsi pour un poset de fonctions indexées par des partages de $n+k$, on peut multiplier chacun des produits de fonctions du poset, dont les fonctions sont indexées par des partages de n , par s_λ où $\lambda \vdash k$. Par exemple, pour le poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 4, on peut retrouver le poset des fonctions indexées par les partages de 2 dont les produits de fonctions de Schur des sommets sont multipliés par s_2 . La figure 4.6 met en évidence cette récurrence.

Malgré tout, il reste des arêtes qui ne peuvent être expliquées par récurrence. Dans le poset ce sont les arêtes représentant les différences $s_2^2 - s_3 s_1$, $s_{11}^2 - s_{111} s_1$ et $s_{21} s_1 - s_{11} s_2$. Les deux premières différences sont indexées par des partages conjugués, il suffit alors d'en justifier une pour que l'autre le soit aussi. En utilisant l'opération $*$ (vue au chapitre précédent) sur les partages $(3, 1)$ on obtient $(2, 2)$, d'où la Schur positivité. D'autre part, $(11, 2)^\sim = (21, 1)$, alors en vertu du théorème 3.4.1 on a la Schur positivité de la troisième différence.

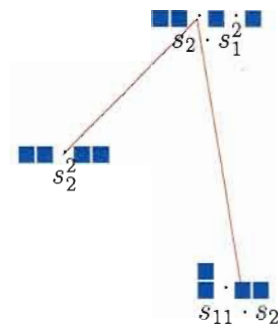


Figure 4.6 Poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 2 et multipliées par s_2 .

Il peut être intéressant de remarquer que les diagrammes associés aux fonctions du côté gauche de ce poset (ou du côté droit si on le dessine inversement par rapport à l'axe) sont exactement les mêmes diagrammes qui sont associés aux fonctions homogènes dans l'ensemble partiellement ordonnées par les s -positifs des fonctions homogènes. On conclut alors que les arêtes situées aux extrémités droites et gauches représentent des différences Schur positives. Au lieu de regarder un poset de fonctions de Schur indexées par un partage plus grand, on observe à la section suivante ce qui arrive avec l'ajout de fonctions de Schur gauches.

4.3 Poset des fonctions de Schur gauches

Afin d'obtenir des représentations d'ensembles partiellement ordonnés de fonctions de Schur gauches, l'étude des égalités entre ces fonctions est nécessaire. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle une section y est allouée (la section 3.1.1). À l'aide des chemins de Dyck et les nombres de Catalan, on peut trouver un nombre maximal de fonctions de Schur gauches, indexées par des partages de n , pouvant servir à la représentation de cet ensemble. Parmi ces fonctions de Schur gauches, si l'on conserve une seule fonction par classe d'égalité (une fonction indexée par un diagramme standardisé), on obtient les fonctions de Schur nécessaires à la représentation du poset (\mathcal{T}_n, \leq) , où

$$\mathcal{T}_n = \{s_{\lambda/\mu} \mid |\lambda| - |\mu| = n\}.$$

On a vu que \mathcal{T}_n est fini à la section 3.1.1.

Puisqu'il y a égalité entre une fonction de Schur gauche s_λ et le produit de fonctions de Schur gauches indexées par les composantes connexes de s_λ , alors l'inscription des sommets peut se faire à l'aide du produit de fonctions indexées par des composantes connexes standardisés. Les diagrammes associés aux fonctions ont aussi été inscrits pour aider à la compréhension de certaines notions.

Aux figures 4.7 et 4.8 on retrouve respectivement les posets des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 2 et 3.

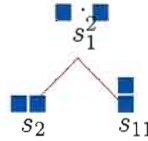


Figure 4.7 Poset des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 2.

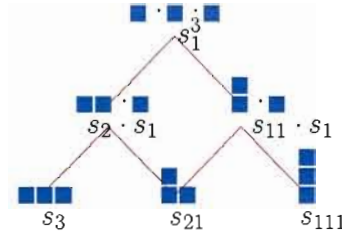


Figure 4.8 Poset des fonctions de Schur gauches indexés par des partages de 3.

On peut remarquer que la fonction $s_{22/1}$ n'est pas dans le poset. On a vu au chapitre précédent qu'il y a des égalités entre fonctions de Schur gauche. Dans ce cas, $s_{22/1} = s_{21}$ puisque la rotation de 180° du diagramme correspondant à $22/1$ est 21 . C'est pourquoi on ne le retrouve pas à la figure 4.8. Dans le présent mémoire, on a choisi dans chaque classe d'égalité, un représentant ayant un dénominateur possédant le plus petit nombre de case, c'est-à-dire tel que pour λ/μ , $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m$ est le plus petit. Pour la même raison, dans le poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 4, on ne retrouve pas les partages $33/2$, $222/11$, On observe que les posets 4.7 et 4.8 ne

sont pas différents des posets vus aux figures 4.3 et 4.4 ; les arêtes et les sommets sont exactement les mêmes. Par contre, lorsqu'on dépasse 3, les posets sont «complétés» avec des fonctions de Schur gauches. À la figure 4.9 on retrouve le poset des fonctions de Schur indexées par des partages de 4 «complété» avec des fonctions de Schur gauches. Les arêtes en bleues représentent les arêtes qui ne figuraient pas sur le poset de la figure 4.5.

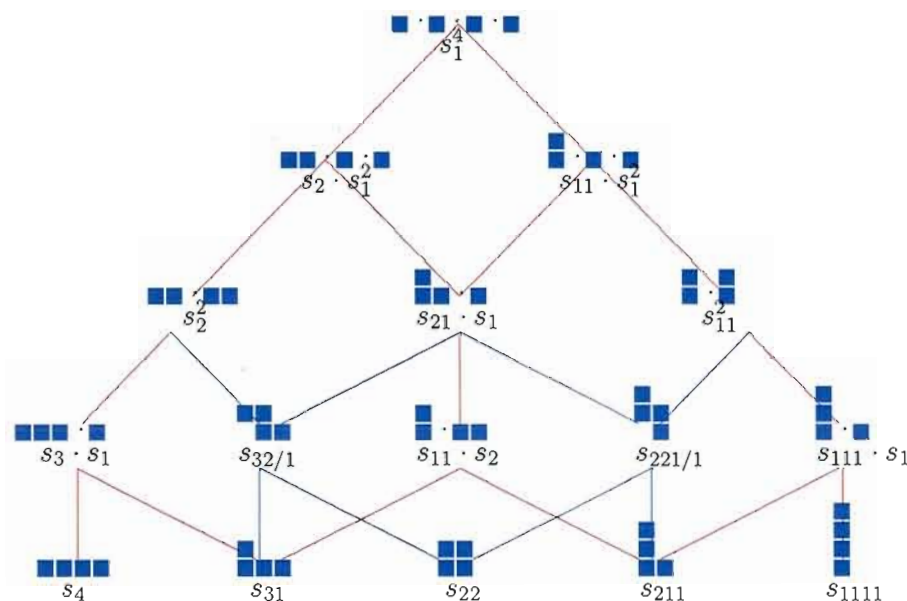


Figure 4.9 Poset des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 4.

Bien sûr la symétrie est toujours présente dans les posets de fonctions de Schur gauches puisque $s_{\mu/\nu} - s_{\alpha/\beta}$ est s -positifs si et seulement si $s_{(\mu/\nu)'} - s_{(\alpha/\beta)'}$ l'est. De plus, les formules de Pieri étendues aux fonctions de Schur gauches justifient l'existence de plusieurs arêtes. En effet, elles expliquent l'existence des arêtes bleues joignant les deux premiers niveaux. L'existence des arêtes bleues reliant les niveaux 2 et 3 s'expliquent à l'aide de l'équation 3.18 provenant de la proposition de Macdonald. Ainsi, par le recollement et l'empilement des diagrammes indexés aux produits, on obtient que $s_{\lambda}s_{\mu} = s_{\lambda \oplus \mu} + s_{\lambda \odot \mu}$. On trouve alors $s_2^2 = s_{32/1} + s_4$, $s_{11}^2 = s_4 + s_{221/1}$, $s_{21}s_1 = s_{221/1} + s_{31}$ et $s_1s_{21} = s_{211} + s_{32/1}$ (on peut observer que les deux derniers produits sont égaux,

mais le recollement et l'empilement ne sont pas des opérations commutatives dans le cas des diagrammes).

À la figure 4.10, on a seulement inscrit les arêtes liant les différences Schur positives de fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 5 ne s'expliquant pas à l'aide de la différence de produits de fonctions indexées par des partages conjugués, de la récurrence, des formules de Pieri, l'équation de Kirillov, de l'opération tilde, de l'opération- $*$ ou la proposition 3.4.4 de Macdonald. À la figure 4.10, on remarque que

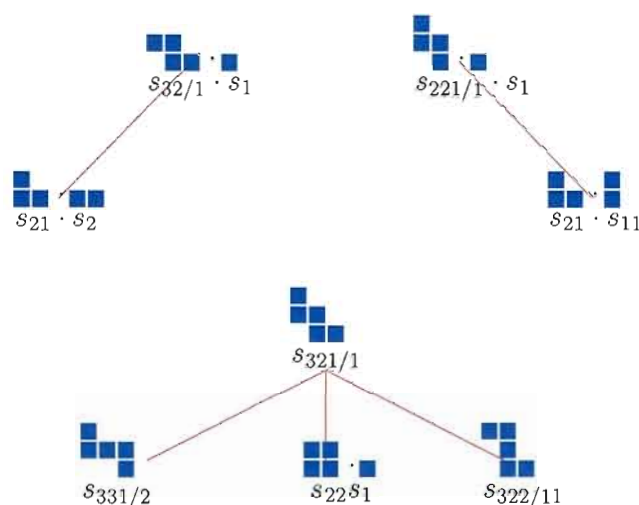


Figure 4.10 Arêtes dont l'existence reste à justifier dans le poset des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 5.

les arêtes sont complètement expliquées par calcul directe dans ces cas particuliers. L'intention de les inscrire ici est simplement d'amener l'idée qu'avec des partages de $n \geq 5$, l'existence d'un grand nombre d'arêtes doivent être justifié plus difficilement. De façon similaire, entre deux fonctions de Schur gauches, il est plus ardu de trouver l'existence d'une arête qui ne se justifie pas à l'aide de l'une des équations ou formules vues plus tôt. Un des problèmes intéressants aux futures recherches sur les différences positives de produits de fonctions de Schur gauches est justement d'expliquer l'existence de ces types d'arêtes, ou bien d'en trouver un principe général.

4.4 Poset des fonctions de Schur gauches ordonnées par la m -positivité

Au chapitre précédent, on a discuté de l'un des intérêts de l'étude de la m -positivité des fonctions de Schur. En effet, les coefficients de Littlewood-Richardson sont multipliés par les nombres de Kostka lors du changement de bases des fonctions de Schur gauches en fonctions monomiales. À la figure 4.11 on trouve l'ensemble partiellement ordonné par la m -positivité des fonctions de Schur gauches indexées par les partages de 4.

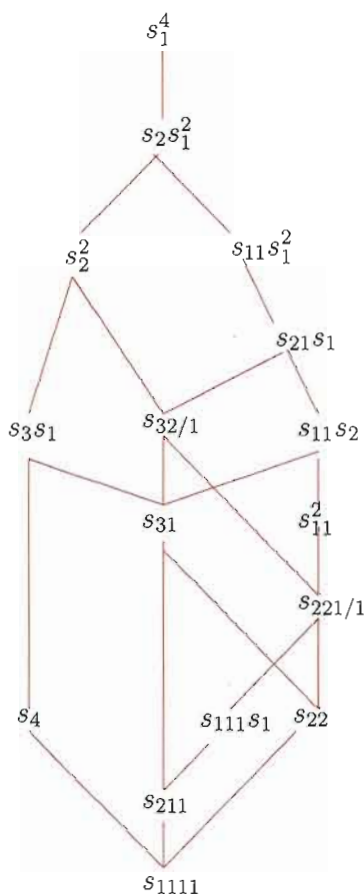


Figure 4.11 Poset des fonctions de Schur gauches indexées par des partages de 4.

Le but de cette section est d'introduire des variantes possibles de l'étude des inégalités entre coefficients de Littlewood-Richardson, ce qui ouvre la porte à l'étude d'autres ensembles partiellement ordonnés de fonctions symétriques.

CONCLUSION

On a vu que l'étude de la Schur positivité des différences de fonctions de Schur gauches ouvre la porte à plusieurs problèmes intéressants. Le but de ce mémoire est d'introduire certaines des recherches effectuées sur le sujet, et d'en faire une synthèse. Il vise aussi à fournir des outils de base pour une meilleure compréhension de ces questions, par le biais de l'introduction d'une structure de poset.

Parmi ces résultats plus spécifiques exposés dans ce mémoire, on compte le cas correspondant à la multiplicité simple pour les coefficients de Littlewood-Richardson, ainsi que quelques cas d'inégalités particulières. Bien entendu, il reste plusieurs questions ouvertes. Entre autres, concernant les inégalités apparaissant à la figure 4.10. Les arêtes de cette figure ne s'expliquent par aucun des résultats exposés dans ce mémoire. En fait, même les égalités entre fonctions de Schur gauches indexées par des diagrammes différents (standardisés) ne sont pas encore toutes comprises. On rappelle que cette question est discutée dans les références suivantes et donnent plus de détails au sujet de certains cas : [5], [17], [18] et [23].

Les conjectures de Fomin, Fulton, Li et Poon dans [6], et, de Bergeron, Biagioli et Rosas dans [2] traitant de l'opération- $*$ ne sont toujours pas démontrées.

APPENDICE A

PROGRAMME MAPLE

Cette appendice comprend les procédures créées dans le cadre de ce mémoire, ainsi que des commentaires expliquant l'utilité de chacune d'elles. L'ensemble de ces procédures sert à trouver les soustractions Schur positives de fonctions de Schur gauches. Elles ont toutes été créées à l'aide du logiciel Maple 10 et bien sûr, n'auraient pas eu lieu sans les progiciels (ou «packages» en anglais) de John R. Stembridge [22].

```
> restart;
> with(combinat,partition):
> with(combinat,choose):
> with(combinat,permute):
> with(combinat,powerset):
> with(LinearAlgebra):

> withSF():
> withposets():

> monpart:=(m,n)->map((nu,n)->if nops(nu)>n then NULL else nu fi,
                        partition(m,n),n):

> inverse:=L->[seq(L[nops(L)-i],i=0..nops(L)-1)]:
```

```
> part_n:=(n)->map((alpha)->inverser(alpha),{partition(n)[]}):
```

La procédure *partition*(m, n) enlève des partages de m les partages ayant une part de valeur supérieure à n . Semblablement, *monpart*(m, n) sert à enlever de *partition*(m, n) les partitions ayant plus de n parts. Pour sa part, *inverse*(L) a pour but d'inverser l'ordre d'une liste d'éléments. Par exemple, *inverse*(12345) donne 54321. On l'utilise dans *part_n*(n) pour qu'il ordonne les parts des partages de *partition*(n) en ordre décroissant.

```
> part_n_et_plus:=(n)->map((m)->map((mu)->
      inverser(mu),monpart(m,n)),[seq(i,i=n..n*(n+1)/2)]):
```

```
> part_moins_de_n:=(n)->map((m)->map((mu)->inverser(mu),
      partition(m)),[seq(i,i=1..n-1)]):
```

```
> concat_partition:=(n)->[part_moins_de_n(n)[],part_n_et_plus(n)[]]:
```

Comme expliqué à la section 3.1.1, pour inclure toutes les fonctions de Schur gauches standardisées $s_{\lambda/\mu}$, situées sous la diagonale passant par $(0, n+1)$ et $(n+1, 0)$, le plus grand partage nécessaire est $\lambda \vdash \frac{n(n+1)}{2}$. C'est pourquoi on veut que la procédure *part_n_et_plus*(n) retourne les partages de n à $\frac{n(n+1)}{2}$. De plus, les partages de 1 à $n-1$ sont nécessaires pour μ , d'où la procédure *part_moins_de_n*(n). En fait, pour n plus grand que 2, le plus grand partage μ qu'on a besoin est un partage de $\frac{(n-1)n}{2}$. On fait donc une concaténation des ensembles de partages de 1 à $\frac{n(n+1)}{2}$ à l'aide de *concat_partition*(n).

```
> jumeler_part:=(Mu,Nu)->[seq(seq([Mu[i],Nu[j]],i=1..nops(Mu)),
      j=1..nops(Nu))]:
```

Cette procédure *jumeler_part*(M, N) vise à jumeler des partages μ et ν provenant respectivement des ensembles de partages M et N . Les partages jumelés correspondent

aux partages gauches. Un partage μ/ν est noté $[[\nu], [\mu]]$.

```
> supprimer_part_jum:=(Mu)->map((mu)->if nops(mu[1])>=nops(mu[2])
                                then NULL
                                elif mu[1][1]>=mu[2][1]
                                then NULL
                                else mu fi,Mu) []:
```

À partir d'un ensemble M de partages gauches, on supprime les partages gauches μ_2/μ_1 dont μ_1 a un nombre de parts plus grand ou égal à μ_2 , et, les partages dont la première part de μ_1 est plus grande que la première part de μ_2 avec l'aide de *supprimer_part_jum*(M). Ceci est dû au fait qu'on cherche à avoir des partages gauches dont au moins une case touche à l'axe des ordonnées et une case à l'axe des abscisses.

```
> part_gauche:=(n)->map((Mu)->supprimer_part_jum(Mu),map((i)->
                                jumeler_part(concat_partition(n)[i],
                                concat_partition(n)[i+n]),
                                [seq(i,i=1..n*(n-1)/2)])):
```

La procédure *part_gauche*(n) sert à obtenir les partages gauches λ/μ jumelés de façon à avoir des partages de n . Ceci se fait en jumelant les partages de $\lambda \vdash (n+1)$ avec les partages de $\mu \vdash 1$, en jumelant les partages de $\lambda \vdash (n+2)$ avec les partages de $\mu \vdash 2$, ..., et en jumelant les partages de $\lambda \vdash \frac{n(n+1)}{2}$ avec les partages de $\mu \vdash \frac{(n-1)n}{2}$. Une sélection de chacune de ces listes de partages est faite à l'aide de *supprimer_part_jum*. Les partages gauches de Ferrers ne figurent pas dans la liste de partages retournée par *part_gauche*(n).

```
> supprimer_part_gauche_equi_a_un_autre:=(Phi,nu)->'intersect'
    (map((mu)->if tos(skew(s[mu[1] []],s[mu[2] []]))=
                tos(skew(s[nu[1] []],s[nu[2] []]))
```

```

        then Phi minus {mu}
    else Phi fi, Phi)[] union {nu}:

```

supprimer_part_gauche_equi_a_un_autre(Φ, ν) enlève de Φ (un ensemble des partages gauches) les partages dont les fonctions de Schur gauches sont égales à la fonction de Schur gauche ν .

```

> supprimer_part_gauche_equi:=proc(n) local Omega,p,i:
  'Omega':=Omega: 'p':=p: 'i':=i:
  Omega:={part_gauche(n)[]}:
  p:=nops({part_gauche(n)[]}):
  for i from 1 to nops({part_gauche(n)[]}) while i<p do
    if nops(supprimer_part_gauche_equi_a_un_autre(Omega,Omega[i]))
                                          <nops(Omega)

    then Omega:=
      supprimer_part_gauche_equi_a_un_autre(Omega,Omega[i]):
      p:=nops(Omega):
    else NULL:
      fi:
    od:
    eval(Omega):
  end:

```

```

> supprimer_part_equi:=proc(n) local Omega:
  'Omega':=Omega:
  Omega:=supprimer_part_gauche_equi(n):
  'intersect'(map((mu)->map((nu)->
    if tos(s[mu[]])=tos(skew(s[nu[1] []],s[nu[2] []]))
    then Omega minus {nu}
    elif tos(skew(s[nu[1] []],s[nu[2] []]))=0

```

```

    then Omega minus {nu}
  else Omega fi, Omega) [], part_n(n) []):
end:

```

À l'aide de *supprimer_part_gauche_equi_a_un_autre(n)*, on enlève de *part_gauche(n)* les partages dont les fonctions de Schur gauches sont égales et on conserve un seul partage représentant ces égalités. Semblablement, *supprimer_part_equi(n)* sert à supprimer les partages gauches provenant de *supprimer_part_gauche_equi(n)* dont les fonctions de Schur gauches correspondantes sont égales à une fonction de Schur. Il reste ainsi tous les partages gauches de n sans leurs partages égaux en terme de fonctions de Schur gauches.

```

> part_gauche_complet:=(n)->[[part_n(n) []],supprimer_part_equi(n) []]:

```

Tous les partages gauches de n (sans égalités en termes de fonctions de Schur gauches) sont donnés par la procédure *part_gauche_complet(n)*.

```

> schur_positif_gauche:=(Omega)->map((mu)->map((nu)->
  if has(tos(skew(s[mu[1] []],s[mu[2] []])))-
    tos(skew(s[nu[1] []],s[nu[2] []])), -1)
  then NULL
  elif tos(skew(s[mu[1] []],s[mu[2] []]))-
    tos(skew(s[nu[1] []],s[nu[2] []]))=0
  then NULL
  else [nu,mu] fi, Omega) [], Omega):

```

À partir d'un ensemble Ω de partages gauches, on calcule avec *schur_positif_gauche(Ω)* les différences Schur positives indexées par les partages gauches compris dans cet ensemble Ω . (Encore une fois, ce sont des partages gauches sans les partages de Ferrers.)

```

> schur_positif:=(n,Omega)->map((mu)->map((nu)->
    if has(tos(skew(s[mu[1][]],s[mu[2][]]))-tos(s[nu[]]),-1)
    then NULL
    elif tos(skew(s[mu[1][]],s[mu[2][]]))-tos(nu[1][1])=0
    then NULL
    else [nu,mu] fi, part_n(n))[],Omega):

```

De façon similaire, on trouve, à l'aide de *schur_positif*(n, Ω), les différences Schur positives entre les fonctions de Schur gauches indexées par les partages gauches provenant d'un ensemble Ω et les fonctions de Schur indexées par les partages de n .

```

> schur_positif_complet:=proc(n) local Omega:
    'Omega':=Omega:
    Omega:=supprimer_part_equi(n):
    schur_positif(n,Omega) union schur_positif_gauche(Omega):
end:

```

Finalement, *schur_positif_complet*(n) retourne un ensemble de couple $[\nu, \mu]$ de partages gauches (de Ferrers ou non) de n tel que $s_\mu - s_\nu$ est une différence Schur positive.

Pour mieux visualiser un diagramme d'ensemble partiellement ordonné par les différences Schur positives, on se sert de la procédure *eliminer_fleche*(n). Celle-ci élimine les flèches qui traversent plus d'un niveau, c'est-à-dire que si l'on a $[\nu, \mu]$, $[\mu, \lambda]$ et $[\nu, \lambda]$ dans *schur_positif_complet*(n), alors on supprime $[\nu, \lambda]$ de *schur_positif_complet*(n).

```

> eliminer_fleche:=proc(n) local Omega,Phi,a,b,c,i,j,y:
    'Omega':=Omega: 'Phi':=Phi: 'i':=i: 'j':=j: 'y':=y:
    Omega:={schur_positif_complet(n)[1]};
    y:=nops(Omega):
    Phi:=Omega:

```

```

for i from 1 to y do
  'b':=b: 'c':=c:
  b:=op(1,op(i,Omega)):
  c:=op(2,op(i,Omega)):
  for j from 1 to y do
    'a':=a:
    a:=op(1,op(j,Omega)):
    if evalb([a,b] in Omega)=true then
      Phi:=Phi minus {[a,c]}:
    else Phi:=Phi:
    fi:
  od:
od:
Phi:
end:

```

Pour obtenir le diagramme d'ensemble partiellement ordonné par les différences Schur positives indexées par des partages gauches de n , on écrit la commande suivante :

```
>plot_poset(schur_positif_complet(n),'labels',font=[HELVETITICA,14]);
```

Ainsi, à l'aide de cette commande, mais avec $n = 3$, on a

```
>plot_poset(schur_positif_complet(3),'labels',font=[HELVETITICA,14]);
```

qui retourne la figure A.1. On fait remarquer que cette figure n'est pas nécessairement la même lorsque l'on compile plusieurs fois avec Maple, mais la figure retournée est toujours un ensemble partiellement ordonné égal en termes de fonctions de Schur gauches.

Dans la figure A.1, on retrouve au sommet $[[2, 1], [3, 2, 1]]$, qui correspond à la fonction de Schur gauche $s_{321/21}$. Le poset nous dit donc que la différence $s_{321/21} - s_{311/2}$ est

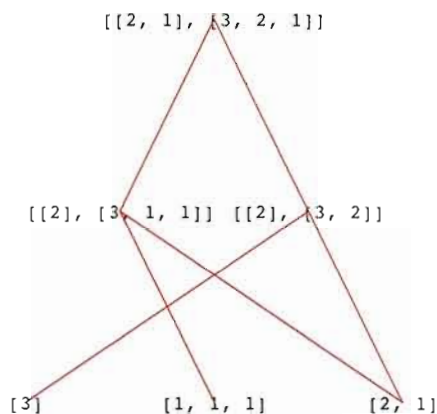


Figure A.1 Poset avec $n=3$

Schur positive. On a que $s_{321/21} - s_{111}$ est aussi Schur positive par définition d'ensemble partiellement ordonné.

Bien sûr, plus on choisit un grand n , plus la compilation est longue et plus la figure est complexe. On s'est arrêté avec $n = 6$ qui a pris quelques heures à compiler avant de retourner la figure A.2. La figure est agrandie au maximum accepté par l'UQAM pour les mémoires (en raison des marges), donc on conseille une loupe pour l'observation.

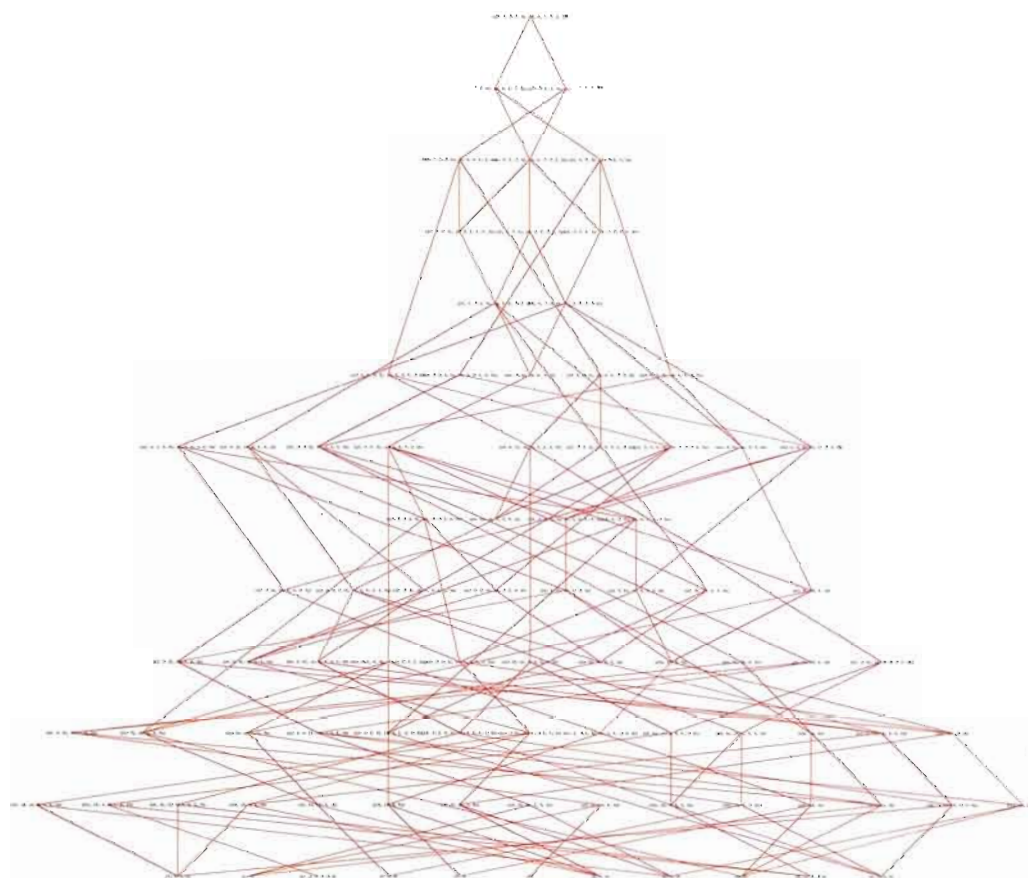


Figure A.2 Poset avec $n=6$

Index

- Chaîne, 24
 - maximale, 24
- Chemin, 13
 - longueur d'un, 13
 - ombre d'un, 15
 - point d'arrivée d'un, 13
 - point de départ d'un, 13
- Composante connexe, 11
- Couvre, 24
- Degré, 7
- Diagamme
 - connexe, 12
- Diagramme, 7
 - équerre, 9
 - équerre épaisse, 10
 - bande horizontale, 18
 - bande verticale, 18
 - carré, 9
 - complété d'un, 7
 - concaténation, 19
 - de Ferrers, 8
 - de Young, 8
 - empilement, 19
 - gauche, 10
 - standardisé, 17
 - presque rectangle, 10
 - pseudo-ruban, 19
 - recollement, 20
 - rectangle, 9
 - ruban, 19
- Différence
 - m -positive, 69
 - s -positive, 55
 - Schur-positive, 55
- Ensemble des permutations, 6
- Ensemble partiellement ordonné, 23
 - élément minimal, 24
 - gradué, 24
 - niveau, 24
- Fonction symétrique, 27
 - élémentaire, 30
 - de Schur, 35
 - espace vectoriel des, 28
 - homogène, 28, 33
 - composante, 28
 - monomiale, 29
- Infimum, 24
- Involution, 52
- Kostka, nombre de, 37
- Lettre, 21

- Littlewood-Richardson, coefficient de, 49
- Monôme, 6
- Mot, 21
 - de Yamanouchi, 21
- Multiplicité simple, 51
- Opération
 - opération-*, 58
 - opération-~, 56
 - Tilde, 56
- Ordre de dominance, 25
- Part, 6
- Partage, 6
 - conjugué, 9
- Pas, 13
- Permutation, 6
- Pieri, formule de, 52
- poset, 23
- Produit scalaire, 51
- Relation d'ordre partiel, 23
- Schur, 35
 - gauche, 38
 - positive, 55
 - s-positive, 55
- segment commun, 17
- Support, 55, 65
- Suprémum, 23
- Tableau, 20
 - contenu d'un, 21
 - monôme du, 21
 - de Young, 22
 - gauche, 22
 - injectif, 21
 - semi-standard, 22
 - standard, 22
- Transposition, 6
- Treillis, 24
 - de Young, 25

Bibliographie

- (1) FRANÇOIS BERGERON, *Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces*, CMS Treatise in Mathematics, à paraître.
- (2) FRANÇOIS BERGERON, RICCARDO BIAGIOLI ET MERCEDES H. ROSAS, *Inequalities between Littlewood-Richardson coefficients*, 2006. Disponible à <http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0403541>.
- (3) FRANÇOIS BERGERON ET JACQUES LABELLE, *Introduction à la combinatoire*, Université du Québec à Montréal, Lacim, 2002.
- (4) FRANÇOIS BERGERON ET PETER MCNAMARA, *Some positive differences of products of Schur functions*, décembre 2004. Disponible à <http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0412289v1>.
- (5) LOUIS J. BILLERA, HUGH THOMAS ET STEPHANIE VAN WILLIGENBURG, *Decomposable compositions, symmetric quasisymmetric functions and equality of ribbon Schur functions*, 2005. Disponible à <http://arxiv.org/abs/math/0405434>.
- (6) SERGEY FOMIN, WILLIAM FULTON, CHI-KWONG LI ET YIU-TUNG POON, *Eigenvalues, singular values, and Littlewood-Richardson coefficients*, 2003. Disponible à <http://www.arxiv.org/abs/math.AG/0301307>.
- (7) FERDINAND GEORG FROBENIUS, *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppen (Gesammelte Abhandlungen volume 3)*, Berlin, Springer-Verlag, 1968.
- (8) CARL JACOBI, *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum (Werke volume 3)*, Chelsea Publication, 1969.

- (9) RONALD C. KING, TREVOR A. WELSH ET STEPHANIE VAN WILLIGENBURG, *Schur positivity of skew Schur function differences and applications to ribbons and Schubert classes*, 2007. Disponible à <http://arxiv.org/abs/0706.3253>.
- (10) ANATOL N. KIRILLOV, *Completeness of states of the generalized Heisenberg magnet*, Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 1984, p.134. Translate in J. Soviet Math, 1987, p.115-128.
- (11) MICHAEL KLEBER, *Plücker Relations on Schur Functions*, 2000. Disponible à <http://www.springerlink.com/content/g5r4h1nv603p465m/fulltext.pdf>.
- (12) THOMAS LAM, ALEXANDER POSTNIKOV ET PAVLO PYLYAVSKYY, *Schur Positivity and Schur log-concavity*, 2005. Disponible à <http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0502446v3>.
- (13) DUDLEY ERNEST LITTLEWOOD ET ARCHIBALD READ RICHARDSON, *Group characters and algebra*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 1934.
- (14) I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, The Clarendon Press Oxford University Press, second edition, 1995.
- (15) PETER R. W. MCNAMARA, *Necessary conditions for Schur-positivity*, 2007. Disponible à <http://arxiv.org/abs/0706.1800>.
- (16) PETER R. W. MCNAMARA ET STEPHANIE VAN WILLIGENBURG, *Positivity results on ribbon Schur function differences*, 2007. Disponible à <http://arxiv.org/abs/0712.2424>.
- (17) PETER R. W. MCNAMARA ET STEPHANIE VAN WILLIGENBURG, *Towards a combinatorial classification of skew Schur functions*, 2007. Disponible à <http://arxiv.org/abs/math/0608446>.

- (18) VICTOR REINER, KRISTIN M. SHAW ET STEPHANIE VAN WILLIGENBURG, *Coincidences among skew Schur functions*, 2007. Disponible à <http://arxiv.org/abs/math/0602634>.
- (19) ISSAI SCHUR, *Über ein Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (Gesammelte Abhandlungen volume 3)*, Berlin, Springer-Verlag, 1973.
- (20) RICHARD P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, volume 2, Cambridge University Press, 1999.
- (21) JOHN R. STEMBRIDGE, *Multiplicity-free products of Schur functions*, Ann. Combin., 5(2) :113-121, 2001.
- (22) JOHN R. STEMBRIDGE, SF, posets et coxeter/weyl. Disponible à <http://www.math.lsa.umich.edu/~jrs/maple.html>.
- (23) STEPHANIE VAN WILLIGENBURG, *Equality of Schur and Skew Schur Functions*, 2007. Disponible à <http://arxiv.org/abs/math/0410044>.